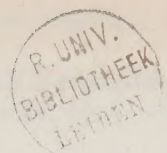


BAUER, H.

Math. Zeitschr. Bd. 65, S. 448—482 (1956)



Über die Beziehungen einer abstrakten Theorie des Riemann-Integrals zur Theorie Radonscher Maße*)

Von
HEINZ BAUER

*) Von der Naturwissenschaftlichen Fakultät der Universität Erlangen als Habilitationsschrift angenommen.

Einleitung

Neben die abstrakte Integrationstheorie von STONE [21], welche die klassische Lebesguesche Theorie zum Vorbild hat, ist neuerdings eine abstrakte Theorie des Riemann-Integrals von LOOMIS [14] getreten. „Abstrakt“ heißt hierbei, daß auf eine Topologie im Definitionsbereich der zu integrierenden Funktionen kein Bezug genommen wird. Ausgangspunkt der Untersuchungen von Loomis ist vielmehr, ähnlich wie bei Stone, ein positives, lineares Funktional I über einem System $\mathfrak{R}$ reeller Funktionen, deren gemeinsamer Definitionsbereich eine Menge E ist; hierbei wird $\mathfrak{R}$ als Vektorverband angenommen, welcher als Ersatz für die eventuell fehlende Konstante 1 mit jeder Funktion g auch $\min(1, g)$ enthält. Im Gegensatz zur Stoneschen Theorie wird die Stetigkeit des Funktional I nicht gefordert. Ziel ist, wie bei allen Untersuchungen dieser Art, durch Einführung einer geeigneten additiven Mengenfunktion $\mu| \mathfrak{Q}$ und Definition eines μ -Unterteilungsintegrals eine Darstellung von $I(f)$ als μ -Integral für eine möglichst umfassende Klasse von Funktionen $f \in \mathfrak{R}$ zu finden. Die fehlende Stetigkeit von I führt hierbei zu einem neuen Gesichtspunkt; es wird nämlich ein gewisses Prinzip der Sparsamkeit bei der Bestimmung der μ -meßbaren Mengen verfolgt. Bei Loomis ist $\mathfrak{Q}$ das System aller Teilmengen Q von E , deren charakteristische Funktionen von oben und unten her durch Funktionen aus $\mathfrak{R}$ beliebig genau I -einschließbar sind; die charakteristische Funktion χ_Q einer Menge $Q \in \mathfrak{Q}$ erhält dann bei jeder möglichen Fortsetzung von I zu einem positiven, linearen Funktional über einem χ_Q als Element enthaltenden Vektorraum von reellen Funktionen auf E den gleichen Funktionalwert, nämlich $\mu(Q)$ zugeordnet. Mit Hilfe von $\mu| \mathfrak{Q}$ gewinnt Loomis das Integral $\int f d\mu$ durch Bildung von Ober- und Untersummen nach dem Vorbild des klassischen Riemann-Integrals.

Wendet man die Loomissche Theorie speziell auf den „konkreten“ Fall eines lokal kompakten Raumes E an und wählt man für $\mathfrak{R}$ die Menge $\mathfrak{R}(E)$ der auf E stetigen Funktionen mit kompaktem Träger, so ist I ein Radonsches Maß ϱ auf E . Es zeigt sich, daß in diesem Falle $\mathfrak{Q}$ das System der ϱ -quadrierbaren Mengen ist, d.h. der relativ kompakten Teilmengen von E , deren Begrenzung eine ϱ -Nullmenge ist. Ferner erweist sich das System der bezüglich I im Sinne von Loomis Riemann-integrierbaren Funktionen als das System aller ϱ -fast überall stetigen Funktionen auf E mit kompaktem

Träger. Man gewinnt auf diese Weise aus der Theorie von Loomis die von HAUPT und PAUC [10], [19], [12b], S. 174ff., entwickelte Theorie des Riemann-Integrals in lokal kompakten Räumen.

Das Hauptergebnis der vorliegenden Arbeit ist gewissermaßen die Umkehrung dieser Feststellung. Zunächst läßt sich zeigen, daß es für die Loomissche Theorie keine Beschränkung der Allgemeinheit bedeutet, die Funktionen aus $\mathfrak{R}$ als beschränkt vorauszusetzen und anzunehmen, daß je zwei verschiedene Elemente von E durch eine Funktion aus $\mathfrak{R}$ getrennt werden können und in jedem Element von E mindestens eine Funktion aus $\mathfrak{R}$ nicht verschwindet. Unter diesen zusätzlichen Annahmen über E und $\mathfrak{R}$ wird dann die Existenz eines durch E und $\mathfrak{R}$ im wesentlichen eindeutig bestimmten, lokal kompakten Raumes $E'_\mathfrak{R}$ nachgewiesen, der E als dichte Teilmenge enthält und folgende Eigenschaft besitzt: Zu jedem positiven, linearen Funktional $I|\mathfrak{R}$ existiert ein eindeutig bestimmtes, positives Radonsches Maß ϱ' auf $E'_\mathfrak{R}$ derart, daß das Mengensystem Ω genau die Spur des Systems der ϱ' -quadrierbaren Teilmengen von $E'_\mathfrak{R}$ und ferner das System der bezüglich I Riemann-integrierbaren Funktionen $f|E$ gleich dem System der auf E verengerten, ϱ' -fast überall stetigen Funktionen $f'|E'_\mathfrak{R}$ mit kompaktem Träger ist. Für jede ϱ' -quadrierbare Menge Q' und deren Spur Q in E ist $\mu(Q) = \varrho'(Q')$; für jede ϱ' -fast überall stetige Funktion $f'|E'_\mathfrak{R}$ mit kompaktem Träger und deren Verengung $f|E$ ist $\int f d\mu = \int f' d\varrho'$.

Durch diesen Darstellungssatz für die nach Loomis Riemann-integrierbaren Funktionen wird das nicht notwendig stetige Funktional I mit dem Radonschen Maß ϱ' , also einem stetigen Funktional über dem Vektorraum $\mathfrak{R}(E'_\mathfrak{R})$ der auf $E'_\mathfrak{R}$ stetigen Funktionen mit kompaktem Träger in Beziehung gesetzt. Der Klärung des hier vorliegenden Sachverhalts dient eine Bemessung des Stetigkeitsdefektes von I durch die Zerlegung von I in seinen sog. stetigen Teil I_c und rein-unstetigen Teil I_p . Da aus der Stoneschen Theorie die Existenz einer Integraldarstellung für den stetigen Teil I_c folgt, lassen sich mit Hilfe dieser Zerlegung Bedingungen herleiten, unter welchen für eine vorgegebene Funktion $f \in \mathfrak{R}$ der Funktionalwert $I(f)$ als Integral darstellbar ist. Hierdurch erscheinen bekannte Sätze über Integraldarstellungen in neuem Lichte.

Die Arbeit gliedert sich in vier Paragraphen. § 1 gibt einen kurzen Überblick über die Theorie von Loomis und ergänzt sie durch einige auf unser Ziel ausgerichtete Bemerkungen. § 2 enthält einen Beweis für die Existenz der Zerlegung $I = I_c + I_p$ und bringt diese in Zusammenhang mit den Begriffsbildungen der Loomisschen Theorie. Insbesondere wird gezeigt, daß der Zerlegung von I die Zerlegung von μ in σ -additiven und rein-endlich-additiven Teil entspricht. In § 3 wird die Loomissche Theorie auf den konkreten Fall eines lokal kompakten Raumes angewandt als Vorstufe für den Beweis des Darstellungssatzes, der dann in § 4 erbracht wird. In einem Beispiel am Schluß der Arbeit wird die Stonesche Kompaktifizierung einer Booleschen Mengenalgebra als Raum $E'_\mathfrak{R}$ gedeutet¹⁾.

¹⁾ Eine Vorankündigung der wichtigsten Resultate dieser Arbeit (ohne Beweise) findet sich in [7].

§ 1. Riemann-Integrierbarkeit bezüglich eines linearen Funktional. Abstrakter Fall²⁾

1.1. Es sei E eine Menge beliebiger Elemente $x, y, \dots$ und $\mathfrak{R}$ eine Menge reeller, endlicher, auf E definierter Funktionen mit folgenden Eigenschaften:

- (1) sind $g, h \in \mathfrak{R}$ und α, β reelle Zahlen, so ist $\alpha g + \beta h \in \mathfrak{R}$;
- (2) ist $g \in \mathfrak{R}$, so ist $|g| \in \mathfrak{R}$;
- (3) ist $g \in \mathfrak{R}$, so ist $\min(1, g) \in \mathfrak{R}$.

Zufolge (1) und (2) ist $\mathfrak{R}$ ein Vektorverband reeller Funktionen über dem Körper $\mathbb{P}$ der reellen Zahlen; insbesondere liegen mit je endlich vielen Funktionen $g_1, \dots, g_n$ auch die Funktionen $\max(g_1, \dots, g_n)$ und $\min(g_1, \dots, g_n)$ in $\mathfrak{R}$. Zufolge (1) bis (3) liegt $\min(\alpha, g)$ in $\mathfrak{R}$ für jede Funktion $g \in \mathfrak{R}$ und jede reelle Zahl $\alpha \geq 0$.

An anderer Stelle [17] haben NÖBELING und Verf. kennzeichnende Eigenschaften derjenigen beschränkten, reellen Funktionen auf E angegeben, welche durch Funktionen aus $\mathfrak{R}$ gleichmäßig approximiert werden können. Wir entnehmen dieser Arbeit das folgende für uns wichtige Resultat⁴⁾.

Lemma 1. Die Menge $\mathfrak{A}$ aller beschränkten, reellen, auf E definierten Funktionen, die durch Funktionen aus $\mathfrak{R}$ gleichmäßig approximiert werden können, ist eine Algebra⁵⁾. Zu jeder Funktion $f \in \mathfrak{A}$ existiert eine gegen f auf E gleichmäßig konvergente Folge $\{g_n\}_{n=1,2,\dots}$ von (beschränkten) Funktionen aus $\mathfrak{R}$ mit folgender Eigenschaft:

- (4)
$$\begin{cases} 0 \leq g_1(x) \leq g_2(x) \leq \dots \leq f(x) & \text{für jedes } x \in E \text{ mit } f(x) \geq 0; \\ 0 \geq g_1(x) \geq g_2(x) \geq \dots \geq f(x) & \text{für jedes } x \in E \text{ mit } f(x) \leq 0. \end{cases}$$

1.2. Neben E und $\mathfrak{R}$ sei gegeben ein auf $\mathfrak{R}$ definiertes, reelles, positives, lineares Funktional I .

Als (zweiseitige) Vervollständigung $\overline{\mathfrak{R}} = \mathfrak{B}(\mathfrak{R}, I)$ von $\mathfrak{R}$ bezüglich I bezeichnen wir die Menge aller reellen Funktionen $f|E$, zu welchen bei beliebig vorgegebenem $\varepsilon > 0$ Funktionen $g, h \in \mathfrak{R}$ existieren mit

$$g \leq f \leq h \quad \text{und} \quad I(h - g) \leq \varepsilon^6).$$

Dann besitzt $\overline{\mathfrak{R}}$ die Eigenschaften (1) bis (3) von $\mathfrak{R}$.

²⁾ Die in den Nummern 1.2 bis 1.6 dieses Paragraphen erwähnten Begriffsbildungen finden sich bei LOOMIS [14].

³⁾ Ist $F(u_1, \dots, u_n)$ eine reelle Funktion in n reellen Variablen $u_1, \dots, u_n$ und sind $g_1, \dots, g_n$ auf E definierte, reelle Funktionen, so bezeichnet $F(g_1, \dots, g_n)$ die durch die Zuordnung $x \rightarrow F(g_1(x), \dots, g_n(x))$ auf E definierte Funktion. Es gilt also z.B. $|g|(x) = |g(x)|$ für alle $x \in E$.

⁴⁾ Da sich die Eigenschaften (1) bis (3) von $\mathfrak{R}$ auf die Menge $\mathfrak{R}^*$ aller beschränkten Funktionen aus $\mathfrak{R}$ übertragen, folgt dies aus der Bemerkung zum Korollar des Kriteriums 2 und dem Satz 1 der zitierten Arbeit [17], S. 58 und 59.

⁵⁾ Für je zwei Funktionen $f_1, f_2 \in \mathfrak{A}$ liegt also jede Linearkombination $\alpha f_1 + \beta f_2$ ($\alpha, \beta \in \mathbb{P}$) und das Produkt $f_1 \cdot f_2$ in $\mathfrak{A}$. Darüber hinaus besitzt $\mathfrak{A}$ auch die Eigenschaften (2) und (3) von $\mathfrak{R}$.

⁶⁾ Wir schreiben $g \leq f \leq h$ für „ $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$ für alle $x \in E$ “.

Vermöge der Definition von $\bar{\mathfrak{R}}$ kann das Funktional I auf genau eine Weise zu einem positiven, linearen Funktional $\bar{I}|\bar{\mathfrak{R}}$ fortgesetzt werden. Für ein beliebiges $f \in \bar{\mathfrak{R}}$ gilt

$$(5) \quad \bar{I}(f) = \sup(I(g); g \leq f, g \in \mathfrak{R}) = \inf(I(h); h \geq f, h \in \mathfrak{R}).$$

$\bar{\mathfrak{R}}$ ist vollständig im Sinne der Gleichung $\mathfrak{B}(\bar{\mathfrak{R}}, \bar{I}) = \bar{\mathfrak{R}}$. Wir bezeichnen daher $\bar{I}|\bar{\mathfrak{R}}$ als die Vervollständigung des Funktional $I|\mathfrak{R}$.

1.3. Für eine Teilmenge A von E bezeichne χ_A die charakteristische Funktion von A bezüglich der Grundmenge E . Eine Teilmenge Q von E heißt *quadrierbar* bezüglich I (kurz (I) -quadrierbar), wenn ihre charakteristische Funktion χ_Q ein Element von $\mathfrak{R}$ ist. Das System aller I -quadrierbaren Mengen werde mit $\mathfrak{Q} = \mathfrak{Q}(\mathfrak{R}, I)$ bezeichnet; definitionsgemäß ist $\mathfrak{Q}(\bar{\mathfrak{R}}, \bar{I}) = \mathfrak{Q}(\mathfrak{R}, I)$. Aus den Eigenschaften (1) bis (3) von $\mathfrak{R}$ (mit $\bar{\mathfrak{R}}$ an Stelle von $\mathfrak{R}$) folgt, daß $\mathfrak{Q}$ ein Boolescher Mengenverband ist, welcher im allgemeinen keine Einheit besitzt. Ist jedoch die auf E konstante Funktion $f=1$ ein Element von $\mathfrak{R}$, so gilt $E \in \mathfrak{Q}$.

Die durch die Gleichung

$$(6) \quad \mu(Q) = \bar{I}(\chi_Q) \quad (Q \in \mathfrak{Q})$$

auf $\mathfrak{Q}$ definierte, reelle, endliche Mengenfunktion μ ist ein *vollständiger Inhalt*, d.h. $\mu|\mathfrak{Q}$ ist (endlich-)additiv und nicht negativ und es gilt $M \in \mathfrak{Q}$ für eine Menge $M \subseteq E$, wenn zu beliebig vorgegebenem $\varepsilon > 0$ Mengen $P, Q \in \mathfrak{Q}$ mit $P \subseteq M \subseteq Q$ und $\mu(Q - P) \leq \varepsilon$ existieren.

1.4. Mit $\mathfrak{E}$ bezeichnen wir die Menge aller endlichen Linearkombinationen von charakteristischen Funktionen I -quadrierbarer Mengen. Es besteht also $\mathfrak{E}$ aus allen reellen Funktionen der Gestalt $f = \sum_{v=1}^n \lambda_v \chi_{Q_v}$ ($Q_v \in \mathfrak{Q}$, $\lambda_v \in \mathbb{P}$). Auch $\mathfrak{E}$ besitzt die Eigenschaften (1) bis (3) von $\mathfrak{R}$ und ist überdies eine Algebra.

Wegen $\mathfrak{E} \subseteq \bar{\mathfrak{R}}$ ist das Funktional $\bar{I}|\mathfrak{E}$ als Verengung von $\bar{I}|\bar{\mathfrak{R}}$ und folglich auch die Vervollständigung $\mathfrak{S} = \mathfrak{B}(\mathfrak{E}, \bar{I})$ von $\mathfrak{E}$ bezüglich $\bar{I}$ definiert. $\mathfrak{S}$ besitzt daher ebenfalls die Eigenschaften (1) bis (3) von $\mathfrak{R}$ und ist ebenso wie $\mathfrak{E}$ eine Algebra von Funktionen. Wegen $\mathfrak{E} \subseteq \mathfrak{S} \subseteq \bar{\mathfrak{R}}$ ist die Verengung $\bar{I}|\mathfrak{S}$ von $\bar{I}|\bar{\mathfrak{R}}$ gleich der Vervollständigung des Funktional $\bar{I}|\mathfrak{E}$.

Nach Loomis [14] heißen die Funktionen aus $\mathfrak{S}$ (eigentlich) *Riemann-integrierbar* bezüglich I ; die einer Funktion $f \in \mathfrak{S}$ zugeordnete reelle Zahl $\bar{I}(f)$ heißt *Riemann-Integral* von f bezüglich I . Da $\bar{I}(f)$ durch Bildung von Ober- und Untersummen nach dem Vorbild des klassischen Riemann-Integrals definiert werden kann, setzt man

$$(7) \quad \bar{I}(f) = \int f d\mu \quad (f \in \mathfrak{S}).$$

1.5. Eine nicht negative, endliche, reelle Funktion $f|E$ heißt (I) -*meßbar*, wenn die Urbildmenge

$$[f > \lambda] = \{x : f(x) > \lambda\}$$

I -quadrierbar ist für alle reellen Zahlen $\lambda > 0$, abgesehen von höchstens abzählbar unendlich vielen Ausnahmen. Eine beliebige, endliche, reelle Funktion $f|E$ heißt (I) -meßbar, wenn ihr Positivteil $f^+ = \max(f, 0)$ und ihr Negativteil $f^- = (-f)^+$ meßbar sind.

Da $\mathfrak{R}$ die Eigenschaft (3) besitzt gilt nach LOOMIS [14], S. 171:

Satz 1. *Die Funktionen aus $\overline{\mathfrak{R}}$ sind sämtlich I -meßbar. Insbesondere sind die Funktionen aus $\mathfrak{R}$ meßbar in bezug auf jedes auf $\mathfrak{R}$ definierte, positive, lineare Funktional.*

Zusatz. *Für eine nicht negative Funktion $f \in \overline{\mathfrak{R}}$ gilt auch $[f \geq \lambda] \in \mathfrak{Q}$ für alle $\lambda > 0$, abgesehen von höchstens abzählbar unendlich vielen Ausnahmewerten.*

Mit Hilfe des eingeführten Meßbarkeitsbegriffes können die Riemann-integrierbaren Funktionen wie folgt gekennzeichnet werden.

Satz 2. *Notwendig und hinreichend für die Riemann-Integrierbarkeit einer reellen Funktion $f|E$ bezüglich des Funktional I ist folgende Bedingung: f ist beschränkt, I -meßbar und im Komplement einer I -quadrierbaren Menge gleich Null.*

Beweis. Es sei f Riemann-integrierbar. Wegen $\mathfrak{Q} \subseteq \overline{\mathfrak{R}}$ ist $f \in \overline{\mathfrak{R}}$ und folglich nach Satz 1 meßbar. Die Funktionen aus $\mathfrak{Q}$ sind als „ $\mathfrak{Q}$ -Treppenfunktionen“ beschränkt und im Komplement einer quadrierbaren Menge gleich Null. Die gleichen Eigenschaften besitzt dann auch f als Element der Vervollständigung $\mathfrak{S}$ von $\mathfrak{Q}$ bezüglich $\bar{I}$. Also ist die Bedingung erfüllt. Nach LOOMIS [14], S. 172 folgt aus dem Bestehen der Bedingung umgekehrt die Riemann-Integrierbarkeit von f .

In diesem Zusammenhang beweisen wir das

Lemma 2. *Eine reelle Funktion $f|E$ ist dann und nur dann im Komplement einer quadrierbaren Menge gleich Null, wenn eine nicht negative Funktion $h \in \mathfrak{R}$ derart existiert, daß $f(x) = 0$ ist für jedes $x \in E$ mit $h(x) < 1$.*

Beweis. Die Funktion f sei im Komplement der quadrierbaren Menge Q gleich Null. Zu Q existiert eine Funktion $h \in \mathfrak{R}$ mit $\chi_Q \leq h$; diese leistet das Verlangte. — Umgekehrt existiere zu f eine nicht negative Funktion $h \in \mathfrak{R}$ mit der genannten Eigenschaft. Nach Satz 1 ist h meßbar. Daher existiert eine reelle Zahl λ mit $0 < \lambda < 1$, für welche die Urbildmenge $Q = [h > \lambda]$ quadrierbar ist. Für ein beliebiges nicht in Q gelegenes Element $x \in E$ ist $h(x) \leq \lambda < 1$ und folglich $f(x) = 0$. Also ist f im Komplement von Q gleich Null.

Mit Hilfe dieses Lemmas ergeben sich nun zwei Korollare zu Satz 2.

Korollar 1. *Notwendig und hinreichend dafür, daß die beschränkten Funktionen aus $\mathfrak{R}$ sämtlich bezüglich I und damit bezüglich eines jeden auf $\mathfrak{R}$ definierten, positiven, linearen Funktional I Riemann-integrierbar sind, ist folgende Bedingung:*

- (8) *Zu jeder Funktion $g \in \mathfrak{R}$ existiert eine nicht negative Funktion $h \in \mathfrak{R}$ derart, daß $g(x) = 0$ ist für jedes $x \in E$ mit $h(x) < 1$ ⁷⁾.*

⁷⁾ Die Bedingung (8) tritt in anderem Zusammenhang auch bei ARENS [1] auf.

Beweis. Wegen Satz 2 und Lemma 2 ist nur noch zu zeigen, daß die Bedingung (8) notwendig ist. Hierzu sei g eine Funktion aus $\mathfrak{R}$. Wir setzen $g' = \min(1, g^+) - \min(1, g^-)$, wobei g^+ den Positiv- und g^- den Negativteil von g bezeichnet. Dann ist g' eine beschränkte Funktion aus $\mathfrak{R}$. Nach Satz 2 und Lemma 2 existiert also eine nicht negative Funktion $h \in \mathfrak{R}$ derart, daß aus $h(x) < 1$ stets $g'(x) = 0$ folgt. Die Funktion h leistet auch bezüglich g das in (8) Verlangte: Für ein $x \in E$ ist entweder $g^+(x) = 0$ oder $g^-(x) = 0$; folglich zieht $g'(x) = 0$ die Gleichungen $g^+(x) = g^-(x) = g(x) = 0$ nach sich.

Korollar 2. Eine beschränkte, durch Funktionen aus $\mathfrak{R}$ gleichmäßig approximierbare, reelle Funktion $f|E$ ist dann und nur dann Riemann-integrierbar bezüglich I und damit bezüglich eines jeden auf $\mathfrak{R}$ definierten, positiven, linearen Funktional, wenn eine nicht negative Funktion $h \in \mathfrak{R}$ existiert derart, daß $f(x) = 0$ ist für jedes $x \in E$ mit $h(x) < 1$.

Beweis. Wegen der Sätze 1 und 2 sowie wegen Lemma 2 genügt es zu zeigen, daß die Funktion f in $\mathfrak{R}$ liegt, falls zu f ein $h \in \mathfrak{R}$ mit den genannten Eigenschaften existiert. Hierzu kann ohne Beschränkung der Allgemeinheit $f \geq 0$ angenommen werden, da mit f auch f^+ und f^- beschränkt und durch Funktionen aus $\mathfrak{R}$ gleichmäßig approximierbar sind und da aus $h(x) < 1$ auch $f^+(x) = f^-(x) = 0$ folgt. Zu $f \geq 0$ und einer beliebigen reellen Zahl $\varepsilon > 0$ existiert aber nach Lemma 1 eine Funktion $g \in \mathfrak{R}$ mit $0 \leq g \leq f \leq g + \varepsilon$. Da aus $f(x) \neq 0$ für ein $x \in E$ folgt $h(x) \geq 1$, gilt dann sogar $g' \leq f \leq h'$, wobei $g' = g$ und $h' = g + \varepsilon h$ Funktionen aus $\mathfrak{R}$ sind. Wegen $I(h' - g') = \varepsilon I(h)$ liegt also f in $\mathfrak{R}$.

1.6. Eine nicht negative, endliche, reelle Funktion $f|E$ heißt *uneigentlich Riemann-integrierbar* (bezüglich des Funktional I), wenn f I -meßbar und die Menge der für alle $g \in \mathfrak{S}$ mit $g \leq f$ gebildeten Zahlen $\int g d\mu$ nach oben beschränkt ist. Als uneigentliches Riemann-Integral $\int f d\mu$ von f wird die reelle Zahl

$$(9) \quad \int f d\mu = \sup^{(u)} (\int g d\mu; g \leq f, g \in \mathfrak{S})$$

definiert. Eine beliebige reelle Funktion $f|E$ heißt *uneigentlich Riemann-integrierbar*, wenn ihr Positiv- und Negativteil uneigentlich Riemann-integrierbar sind. Man setzt

$$(10) \quad \int f d\mu = \int f^+ d\mu - \int f^- d\mu.$$

Aus Satz 2 folgt, daß die Menge $\mathfrak{S}$ der eigentlich Riemann-integrierbaren Funktionen ein *gesättigter*, linearer Unterraum von $\mathfrak{R}$ ist, d.h. ein linearer Unterraum mit folgender Eigenschaft:

$$(11) \quad \text{Aus } |g| \leq |f|, \text{ wobei } f \in \mathfrak{S} \text{ und } g \in \mathfrak{R} \text{ ist, folgt } g \in \mathfrak{S}.$$

Also sind die Begriffsbildungen von [5] anwendbar. Danach heißt ein auf $\mathfrak{R}$ definiertes, positives, lineares Funktional L $\mathfrak{S}$ -singulär, wenn

$$(12) \quad L(f) = \sup (L(g); g \leq f, g \in \mathfrak{S})$$

für jede nicht negative Funktion $f \in \mathfrak{R}$ gilt.

Satz 3. Die Funktionen aus $\overline{\mathfrak{R}}$ sind sämtlich uneigentlich Riemann-integrierbar bezüglich I . Das somit für alle $f \in \overline{\mathfrak{R}}$ definierte uneigentliche Riemann-Integral $\int f d\mu$ ist die einzig mögliche Fortsetzung des auf $\mathfrak{S}$ definierten, positiven, linearen Funktional $g \rightarrow \int g d\mu$ zu einem $\mathfrak{S}$ -singulären, positiven, linearen Funktional auf $\overline{\mathfrak{R}}$. Hierbei gilt für jedes $f \in \overline{\mathfrak{R}}$

$$(13) \quad \left| \int f d\mu \right| \leq \overline{I}(|f|).$$

Beweis. Es sei f eine nicht negative Funktion aus $\overline{\mathfrak{R}}$. Zuzufolge (7) gilt dann $\int g d\mu \leq I(f)$ für jedes $g \in \mathfrak{S}$ mit $g \leq f$. Da f nach Satz 1 auch meßbar ist, so ist also f uneigentlich Riemann-integrierbar. Gleiches gilt dann für eine beliebige Funktion $f \in \overline{\mathfrak{R}}$, da mit f auch f^+ und f^- Elemente von $\overline{\mathfrak{R}}$ sind.

Für nicht negative Funktionen $f', f'' \in \overline{\mathfrak{R}}$ folgt aus (9) $\int (f' + f'') d\mu = \int f' d\mu + \int f'' d\mu$. Hierzu genügt es zu bemerken, daß zu jeder Funktion $g \in \mathfrak{S}$ mit $0 \leq g \leq f' + f''$ Funktionen $g', g'' \in \mathfrak{S}$ mit $g = g' + g''$ sowie $0 \leq g' \leq f'$ und $0 \leq g'' \leq f''$ existieren; wegen (11) leisten z. B. $g' = \min(g, f')$ und $g'' = \max(0, g - f')$ das Verlangte. Aus der Gültigkeit der Gleichung

$$\int (f' + f'') d\mu = \int f' d\mu + \int f'' d\mu$$

und $\int f' d\mu \geq 0$ für beliebige $f', f'' \in \overline{\mathfrak{R}}$ mit $f' \geq 0$ und $f'' \geq 0$ sowie aus (10)

folgt aber (vgl. [8], S. 34), daß $f \rightarrow \int f d\mu$ auf $\overline{\mathfrak{R}}$ ein positives, lineares Funktional ist. Daß dieses die einzig mögliche $\mathfrak{S}$ -singuläre Fortsetzung des auf $\mathfrak{S}$ erklärten, eigentlichen Riemann-Integrals ist, folgt aus (9) und (10). Aus (9) folgt (13) zunächst für den Spezialfall einer Funktion $f \geq 0$ aus $\overline{\mathfrak{R}}$ und hieraus allgemein bei Beachtung von (10).

§ 2. Zerlegungssätze

2.1. Es sei $\mathfrak{M}$ ein Vektorverband von auf einer Menge A definierten, endlichen, reellen Funktionen und L ein auf $\mathfrak{M}$ definiertes, positives, lineares Funktional. Dann heißt L bekanntlich *stetig*, wenn es der folgenden Bedingung genügt: Für jede nicht fallende Folge $\{f_n\}_{n=1,2,\dots}$ von Funktionen aus $\mathfrak{M}$, deren obere Einhüllende $f = \sup f_n$ ein Element von $\mathfrak{M}$ ist, gilt $L(f) = \sup L(f_n)$. Dagegen heißt L *rein-unstetig*, wenn $K=0$ das einzige stetige, (positive) lineare Funktional auf $\mathfrak{M}$ ist mit $0 \leq K(f) \leq L(f)$ für jede Funktion $f \geq 0$ aus $\mathfrak{M}$.

Nach einem in [3], S. 116 von uns bewiesenen Zerlegungssatz existieren zu einem positiven, linearen Funktional $L|\mathfrak{M}$ genau ein stetiges, positives, lineares Funktional $L_c|\mathfrak{M}$ und genau ein rein-unstetiges, positives lineares Funktional $L_p|\mathfrak{M}$ derart, daß $L = L_c + L_p$ ist. Es heißt L_c der *stetige* und L_p der *rein-unstetige Teil* von L .

Drücken wir den Sachverhalt, daß $\{f_n\}_{n=1,2,\dots}$ eine nicht fallende Folge reeller Funktionen auf A mit der oberen Einhüllenden f ist, durch das Zeichen $f_n \uparrow f$ aus und bezeichnen wir mit $\mathfrak{M}_+$ die Menge aller $f \in \mathfrak{M}$ mit $f \geq 0$, so gilt

Lemma 3. Für jede Funktion $f \in \mathfrak{M}_+$ ist

$$L_c(f) = \inf (\sup L(f_n); f_n \uparrow f, f_n \in \mathfrak{M}_+).$$

Beweis. Wir setzen $L^*(f) = \inf (\sup L(f_n); f_n \uparrow f, f_n \in \mathfrak{M}_+)$ für eine beliebige Funktion $f \in \mathfrak{M}_+$ und behaupten zunächst, daß L^* auf genau eine Weise zu einem positiven, linearen Funktional auf $\mathfrak{M}$ fortgesetzt werden kann, welches wir ebenfalls mit L^* bezeichnen. Hierfür ist notwendig und hinreichend, daß (a) $L^*(f+g) = L^*(f) + L^*(g)$ und (b) $L^*(f) \geq 0$ ist für beliebige Funktionen $f, g \in \mathfrak{M}_+$. Während (b) unmittelbar klar ist, folgt (a) aus der Bemerkung, daß die Existenz einer Folge von Funktionen $h_n \in \mathfrak{M}_+$ mit $h_n \uparrow f+g$ äquivalent ist mit der Existenz zweier Folgen von Funktionen $f_n \in \mathfrak{M}_+$ und $g_n \in \mathfrak{M}_+$ mit $h_n = f_n + g_n$ sowie $f_n \uparrow f$ und $g_n \uparrow g$. Bei gegebener Folge $\{h_n\}$ leisten nämlich $f_n = \min(h_n, f)$ und $g_n = h_n - f_n = \max(0, h_n - f)$ das Verlangte; aus $f_n \uparrow f$ und $g_n \uparrow g$ folgt umgekehrt $f_n + g_n \uparrow f+g$.

Wir behaupten weiter, daß $L^*| \mathfrak{M}$ stetig ist. Es genügt hierfür zu zeigen, daß $L^*(f) \leq \sup L^*(f_n)$ ist für jede Folge $\{f_n\}_{n=1,2,\dots}$ von Funktionen aus $\mathfrak{M}_+$ mit $f_n \uparrow f$ und $f \in \mathfrak{M}_+$. Nach Definition von L^* existiert zu beliebigem $\varepsilon > 0$ und für jedes $n = 1, 2, \dots$ eine Folge $\{g_{nk}\}_{k=1,2,\dots}$ von Funktionen aus $\mathfrak{M}_+$ mit $g_{nk} \uparrow f_n$ und

$$\sup_{k=1,2,\dots} L(g_{nk}) \leq L^*(f_n) + \frac{\varepsilon}{2^n}.$$

Wir setzen $f_{nk} = \max(g_{1k}, \dots, g_{nk})$ und zeigen mittels vollständiger Induktion nach n die Gültigkeit der Ungleichung

$$\sup_{k=1,2,\dots} L(f_{nk}) \leq L^*(f_n) + \varepsilon \left(1 - \frac{1}{2^n}\right) \quad (n = 1, 2, \dots).$$

Für $n=1$ ist nichts zu zeigen. Der Schluß von n auf $n+1$ verläuft so: Setzt man $h_{nk} = \min(f_{nk}, g_{n+1,k})$, so ist $f_{n+1,k} = \max(f_{nk}, g_{n+1,k}) = f_{nk} + g_{n+1,k} - h_{nk}$ und folglich

$$\begin{aligned} L(f_{n+1,k}) &= L(f_{nk}) + L(g_{n+1,k}) - L(h_{nk}) \\ &\leq L^*(f_n) + \varepsilon \left(1 - \frac{1}{2^n}\right) + L^*(f_{n+1}) + \frac{\varepsilon}{2^{n+1}} - L(h_{nk}); \end{aligned}$$

wegen $h_{nk} \uparrow f_n$ ist $L^*(f_n) \leq \sup_{k=1,2,\dots} L(h_{nk})$ und daher, wie behauptet,

$$\sup_{k=1,2,\dots} L(f_{n+1,k}) \leq L^*(f_{n+1}) + \varepsilon \left(1 - \frac{1}{2^{n+1}}\right).$$

Nach Konstruktion gilt $f_{nk} \leq f_{n+1,k+1}$ und entsprechend $L(f_{nk}) \leq L(f_{n+1,k+1})$ für beliebige $n, k = 1, 2, \dots$. Es ist also $\{f_{nn}\}_{n=1,2,\dots}$ eine nicht fallende Folge von Funktionen aus $\mathfrak{M}_+$ mit $\sup f_{nn} = \sup_n (\sup_k f_{nk}) = f$ und $\sup L(f_{nn}) = \sup_n (\sup_k L(f_{nk}))$ ⁸⁾. Aus der für alle $n = 1, 2, \dots$ bewiesenen Ungleichung folgt also nunmehr

$$L^*(f) \leq \sup L(f_{nn}) \leq \sup L^*(f_n) + \varepsilon$$

für jedes $\varepsilon > 0$ und hieraus $L^*(f) \leq \sup L^*(f_n)$. Also ist L^* stetig.

⁸⁾ Vgl. HAUPT-AUMANN-PAUC [12a], S. 147, Nr. 5.4.4.1.

Nach Definition von L^* ist $L - L^*$ ein positives, lineares Funktional auf $\mathfrak{M}$. Wir zeigen, daß $L - L^*$ rein-unstetig ist. Hierzu sei $K|_{\mathfrak{M}}$ ein stetiges, positives, lineares Funktional mit $0 \leq K(f) \leq L(f) - L^*(f)$ für alle $f \in \mathfrak{M}_+$. Für eine beliebige Folge $\{f_n\}_{n=1,2,\dots}$ von Funktionen aus $\mathfrak{M}_+$ mit $f_n \uparrow f$ und $f \in \mathfrak{M}_+$ gilt dann die Ungleichung $0 \leq K(f) \leq \sup L(f_n) - L^*(f)$ wegen der Stetigkeit von K und L^* . Hieraus folgt $K(f) = 0$ nach Definition von L^* . Also ist $L - L^*$ rein-unstetig.

Aus den bewiesenen Eigenschaften von L^* folgt $L^* = L_c$ und damit die Behauptung.

2.2. Wie in § 1 sei nun wieder ein System $\mathfrak{R}$ auf einer Menge E definierter, reeller Funktionen mit den Eigenschaften (1) bis (3) und ein positives, lineares Funktional $I|_{\mathfrak{R}}$ vorgegeben.

Bezeichnet I_c den stetigen und I_p den rein-unstetigen Teil von $I|_{\mathfrak{R}}$, so ergeben sich die zweiseitigen Vervollständigungen

$$\overline{\mathfrak{R}}_c = \mathfrak{B}(\mathfrak{R}, I_c) \quad \text{und} \quad \overline{\mathfrak{R}}_p = \mathfrak{B}(\mathfrak{R}, I_p)$$

von $\mathfrak{R}$ bezüglich I_c und I_p sowie die Booleschen Mengenverbände

$$\mathfrak{Q}_c = \mathfrak{Q}(\mathfrak{R}, I_c) \quad \text{und} \quad \mathfrak{Q}_p = \mathfrak{Q}(\mathfrak{R}, I_p)$$

bestehend aus allen I_c - bzw. I_p -quadrierbaren Teilmengen von E . Schließlich ergeben sich noch die Systeme $\mathfrak{S}_c$ und $\mathfrak{S}_p$ der bezüglich I_c bzw. I_p Riemann-integrierbaren Funktionen. Wir behaupten die Gültigkeit der folgenden drei Gleichungen⁹⁾:

$$(14) \quad \overline{\mathfrak{R}} = \overline{\mathfrak{R}}_c \cap \overline{\mathfrak{R}}_p;$$

$$(15) \quad \mathfrak{Q} = \mathfrak{Q}_c \cap \mathfrak{Q}_p;$$

$$(16) \quad \mathfrak{S} = \mathfrak{S}_c \cap \mathfrak{S}_p.$$

Zum Beweis von (14) sei $f \in \overline{\mathfrak{R}}$. Zu beliebigem $\varepsilon > 0$ existieren dann Funktionen $g, h \in \mathfrak{R}$ mit $g \leq f \leq h$ und $I(h - g) \leq \varepsilon$. Wegen $I_c(h - g) \leq I(h - g)$ und $I_p(h - g) \leq I(h - g)$ ist also $f \in \overline{\mathfrak{R}}_c \cap \overline{\mathfrak{R}}_p$. Umgekehrt sei $f \in \overline{\mathfrak{R}}_c \cap \overline{\mathfrak{R}}_p$. Dann existieren zu beliebigem $\varepsilon > 0$ Funktionen $g', h', g'', h'' \in \mathfrak{R}$ mit $g' \leq f \leq h'$ und $g'' \leq f \leq h''$ derart, daß $I_c(h' - g') \leq \varepsilon$ und $I_p(h'' - g'') \leq \varepsilon$ ist. Setzen wir also $g = \max(g', g'')$ und $h = \min(h', h'')$, so sind g und h Funktionen aus $\mathfrak{R}$ mit $g \leq f \leq h$ und $h - g \leq \min(h' - g', h'' - g'')$. Folglich ist $I(h - g) = I_c(h - g) + I_p(h - g) \leq 2\varepsilon$, also $f \in \overline{\mathfrak{R}}$. — Aus (14) folgt (15), da $Q \in \mathfrak{Q}$ gleichbedeutend mit $\chi_Q \in \mathfrak{R}$ ist. — Eine reelle Funktion $f|_E$, die sowohl im Komplement einer I_c -quadrierbaren Menge als auch im Komplement einer I_p -quadrierbaren Menge gleich Null ist, ist nach Lemma 2 auch im Komplement einer I -quadrierbaren Menge gleich Null. Beachtet man dies, so folgt (16) aus (15) und Satz 2.

⁹⁾ Bei deren Beweis wird nur benützt, daß I_c und I_p positive, lineare Funktionale auf $\mathfrak{R}$ mit $I = I_c + I_p$ sind.

2.3. Nach 1.2 können die Funktionale $I_c|\mathfrak{R}$ und $I_p|\mathfrak{R}$ zu positiven, linearen Funktionalen $\bar{I}_c|\bar{\mathfrak{R}}_c$ und $\bar{I}_p|\bar{\mathfrak{R}}_p$ vervollständigt werden; wegen (14) ist $\bar{\mathfrak{R}}$ der Durchschnitt der Definitionsbereiche von $\bar{I}_c$ und $\bar{I}_p$. Nach 1.3 leiten sich aus I_c und I_p die vollständigen Inhalte $\mu_c|\mathfrak{Q}_c$ und $\mu_p|\mathfrak{Q}_p$ ab, welche wegen (15) insbesondere auf $\mathfrak{Q}$ definiert sind. Der folgende Satz enthält unter anderem die Aussage, daß $\mu_c|\mathfrak{Q}$ der σ -additive und $\mu_p|\mathfrak{Q}$ der rein-endlich-additive Teil von $\mu|\mathfrak{Q}$ ist.

Hierzu sei bemerkt, daß eine auf einem Booleschen Verband $\mathfrak{B}$ von Teilmengen einer Grundmenge A definierte, nicht negative, additive Mengenfunktion ϱ σ -additiv heißt, wenn $\sup \varrho(M_n) = \varrho(M)$ ist für jede nicht fallende Folge $\{M_n\}_{n=1,2,\dots}$ von Mengen aus $\mathfrak{B}$ mit $M = \bigcup_{n=1}^{\infty} M_n \in \mathfrak{B}$. Dagegen heißt ϱ *rein-endlich-additiv*, wenn $\tau = 0$ die einzige σ -additive Funktion $\tau|\mathfrak{B}$ ist mit $0 \leq \tau(M) \leq \varrho(M)$ für alle $M \in \mathfrak{B}$. Nach YOSIDA und HEWITT [23]¹⁰⁾ existieren zu jeder nicht negativen, additiven Funktion $\varrho|\mathfrak{B}$ genau eine nicht negative, σ -additive Funktion $\varrho_c|\mathfrak{B}$ und genau eine nicht negative, rein-endlich-additive Funktion $\varrho_p|\mathfrak{B}$ mit $\varrho = \varrho_c + \varrho_p$. Man nennt ϱ_c den σ -additiven und ϱ_p den *rein-endlich-additiven Teil* von ϱ . In Analogie zu der in Lemma 3 behaupteten Formel gilt nach WOODBURY [22]¹¹⁾

$$(17) \quad \varrho_c(M) = \inf(\sup \varrho(M_n); M_n \uparrow M, M_n \in \mathfrak{B})$$

für alle $M \in \mathfrak{B}$. Hierbei steht $M_n \uparrow M$ für $M_1 \subseteq M_2 \subseteq \dots \subseteq M = \bigcup_{n=1}^{\infty} M_n$.

Der bereits angekündigte Satz lautet nun:

Satz 4. I. Es ist $\bar{I}_c|\bar{\mathfrak{R}}$ der stetige und $\bar{I}_p|\bar{\mathfrak{R}}$ der rein-unstetige Teil des Funktional $\bar{I}|\bar{\mathfrak{R}}$; also gilt auf $\bar{\mathfrak{R}}$

$$(18) \quad \bar{I}_c = \bar{I}_c \quad \text{und} \quad \bar{I}_p = \bar{I}_p.$$

II. Es ist $\mu_c|\mathfrak{Q}$ der σ -additive und $\mu_p|\mathfrak{Q}$ der rein-endlich-additive Teil von $\mu|\mathfrak{Q}$.

Beweis. Zu I. Wir zeigen zunächst, daß das Funktional $\bar{I}_c|\bar{\mathfrak{R}}_c$ stetig ist; insbesondere ist dann $\bar{I}_c|\bar{\mathfrak{R}}$ stetig. Hierzu sei $f \in \bar{\mathfrak{R}}_c$ und $\{f_n\}_{n=1,2,\dots}$ eine Folge von Funktionen aus $\bar{\mathfrak{R}}_c$ mit $f_n \uparrow f$; ferner sei $\varepsilon > 0$ eine reelle Zahl. Dann existiert ein $g \in \bar{\mathfrak{R}}$ mit $g \leq f$ und $\bar{I}_c(f) - \varepsilon \leq \bar{I}_c(g)$, sowie für $n = 1, 2, \dots$ ein $h_n \in \bar{\mathfrak{R}}$ mit $f_n \leq h_n$ und $\bar{I}_c(h_n) \leq \bar{I}_c(f_n) + \varepsilon/2^n$. Setzen wir $g_n = \max(h_1, \dots, h_n)$ für jedes n , so ist $\{g_n\}$ eine nicht fallende Folge von Funktionen aus $\bar{\mathfrak{R}}$ mit $f_n \leq g_n$ und $\bar{I}_c(g_n) \leq \bar{I}_c(f_n) + \varepsilon(1 - 1/2^n)$; diese Ungleichung beweist man wie die hierzu analoge Ungleichung im Beweis von Lemma 3 durch vollständige Induktion nach n . Nun ist $g \leq f \leq \sup g_n$ und folglich $\bar{I}_c(g) \leq \sup \bar{I}_c(g_n)$ wegen der Stetigkeit von $\bar{I}_c|\bar{\mathfrak{R}}$. Hieraus folgt $\bar{I}_c(f) - \varepsilon \leq \bar{I}_c(g) \leq \sup \bar{I}_c(g_n) \leq \sup \bar{I}_c(f_n) + \varepsilon$; also ist $\bar{I}_c(f) \leq \sup \bar{I}_c(f_n)$. Wegen der Positivität von $\bar{I}_c|\bar{\mathfrak{R}}_c$ folgt hieraus die behauptete Stetigkeit.

¹⁰⁾ Wie in [3], S. 113 von Verf. gezeigt wurde, ist die bei YOSIDA-HEWITT gemachte Annahme der Existenz der Einheit A in V unnötig.

¹¹⁾ Ein Beweis dieser Formel unter allgemeineren Voraussetzungen findet sich in [6], S. 219.

Das Funktional $\bar{I}_p|\bar{\mathfrak{M}}$ (und damit auch $\bar{I}_p|\bar{\mathfrak{M}}_p$) ist rein-unstetig. Es sei nämlich $K|\bar{\mathfrak{M}}$ ein stetiges, positives, lineares Funktional mit $0 \leq K(f) \leq \bar{I}_p(f)$ für alle $f \geq 0$ aus $\bar{\mathfrak{M}}$. Da $\bar{I}_p(g) = I_p(g)$ für alle $g \in \mathfrak{M}$ und $I_p|\mathfrak{M}$ rein-unstetig ist, folgt dann zunächst $K(g) = 0$ für alle $g \in \mathfrak{M}$ und hieraus $K(f) = 0$ für alle $f \in \bar{\mathfrak{M}}$. Man hat hierzu nur zu berücksichtigen, daß $\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{B}(\mathfrak{M}, K)$ ist.

Schließlich ist $\bar{I}_c + \bar{I}_p$ eine Fortsetzung von $I|\mathfrak{M}$ zu einem positiven, linearen Funktional auf $\bar{\mathfrak{M}}$. Da $\bar{I}_p|\bar{\mathfrak{M}}$ nach 1.2 die einzige derartige Fortsetzung ist, gilt $\bar{I} = \bar{I}_c + \bar{I}_p$ auf $\bar{\mathfrak{M}}$. Also ist $\bar{I}_c = \bar{I}_c$ und $\bar{I}_p = \bar{I}_p$ auf $\bar{\mathfrak{M}}$, wie behauptet wurde.

Zu II. Es sei $\{Q_n\}_{n=1,2,\dots}$ eine Folge von Mengen aus $\mathfrak{Q}_c$ mit $Q_n \uparrow Q$ und $Q \in \mathfrak{Q}_c$. Dann gilt $\chi_{Q_n} \uparrow \chi_Q$ für die Folge der zugehörigen charakteristischen Funktionen. Zuzufolge der bereits bewiesenen Stetigkeit von $\bar{I}_c|\bar{\mathfrak{M}}_c$ ist also $\sup \mu_c(Q_n) = \sup \bar{I}_c(\chi_{Q_n}) - \bar{I}_c(\chi_Q) = \mu_c(Q)$. Folglich ist $\mu_c|\mathfrak{Q}_c$ und damit auch $\mu_c|\mathfrak{Q}$ σ -additiv.

Für den Nachweis, daß $\mu_p, \mathfrak{Q}$ (und damit übrigens auch $\mu_p|\mathfrak{Q}_p$) rein-endlich-additiv ist, sei $\varrho|\mathfrak{Q}$ eine σ -additive Funktion mit $0 \leq \varrho(Q) \leq \mu_p(Q)$ für alle $Q \in \mathfrak{Q}$. Für eine beliebige Funktion f aus der Menge $\mathfrak{G}$ der $\mathfrak{Q}$ -Treppenfunktionen und eine Darstellung von f in der Form $f = \sum_{v=1}^n \lambda_v \chi_{Q_v}$ mit $Q_v \in \mathfrak{Q}$ und reellen Zahlen λ_v setzen wir $R(f) = \sum_{v=1}^n \lambda_v \varrho(Q_v)$. Dann ist bekanntlich¹²⁾

$R|\mathfrak{G}$ eindeutig definiert und ein stetiges, positives, lineares Funktional. Es ist $0 \leq R(f) \leq \bar{I}_p(f)$ für alle $f \geq 0$ aus $\mathfrak{G}$. Aus dieser Ungleichung folgt $\mathfrak{S}_p \subseteq \mathfrak{B}(\mathfrak{G}, R)$; also kann R nach 1.2 auf genau eine Weise zu einem positiven, linearen Funktional $\bar{R}$ auf $\mathfrak{S}_p$ fortgesetzt werden. Nach dem zu I. Bewiesenen (angewandt auf $R|\mathfrak{G}$ an Stelle von $I_c|\mathfrak{M}$) ist $\bar{R}_p|\mathfrak{S}_p$ stetig; ferner gilt $0 \leq \bar{R}(f) \leq \bar{I}_p(f)$ für alle $f \geq 0$ aus $\mathfrak{S}_p$. Wie im Beweis des Satzes 3 zeigt man, daß $\bar{R}|\mathfrak{S}_p$ auf genau eine Weise zu einem $\mathfrak{S}_p$ -singulären, positiven, linearen Funktional $I_e|\bar{\mathfrak{M}}_p$ fortgesetzt werden kann. Für jede Funktion $f \geq 0$ aus $\bar{\mathfrak{M}}_p$ gilt dann wegen (12) $I_e(f) = \sup(\bar{R}(g); g \leq f, g \in \mathfrak{S}_p)$; hieraus folgt $0 \leq I_e(f) \leq \bar{I}_p(f)$ für jedes solche f . Da $\bar{I}_p|\bar{\mathfrak{M}}_p$ nach dem zu I. Bewiesenen rein-unstetig ist, folgt also $I_e(f) = 0$ für alle $f \in \bar{\mathfrak{M}}_p$ und hieraus $\varrho(Q) = 0$ für alle $Q \in \mathfrak{Q}$, falls I_e ein stetiges Funktional ist. Um zu zeigen, daß $\mu_p|\mathfrak{Q}$ rein-endlich-additiv ist, haben wir also noch die Stetigkeit von I_e zu beweisen. Hierzu sei $\{f_n\}_{n=1,2,\dots}$ eine Folge nicht negativer Funktionen aus $\bar{\mathfrak{M}}_p$ mit $f_n \uparrow f$ und $f \in \bar{\mathfrak{M}}_p$. Wegen der Positivität von I_e ist nur $I_e(f) \leq \sup I_e(f_n)$ zu zeigen. Setzen wir $g_n = \min(f_n, f)$ für eine beliebige Funktion $g \in \mathfrak{S}_p$ mit $0 \leq g \leq f$, so sind, da $\mathfrak{S}_p$ ein gesättigter, linearer Unterraum von $\bar{\mathfrak{M}}_p$ ist, alle g_n Elemente von $\mathfrak{S}_p$; ferner gilt $g_n \uparrow g$. Wegen der Stetigkeit von $\bar{R}|\mathfrak{S}_p$ ist also $\bar{R}(g) = \sup \bar{R}(g_n)$. Es ist $\bar{R}(g_n) \leq I_e(f_n)$ für jedes n und somit $\bar{R}(g) \leq \sup I_e(f_n)$. Da $g \in \mathfrak{S}_p$ beliebig mit $0 \leq g \leq f$ gewählt war, folgt hieraus die behauptete Ungleichung $I_e(f) \leq \sup I_e(f_n)$.

¹²⁾ Vgl. etwa AUMANN [2], S. 365, Satz 9.1.3.1.

Aus der für alle $f \in \mathfrak{M}$ gültigen Gleichung $\bar{I} = \bar{I}_c + \bar{I}_p$ folgt schließlich $\mu(Q) = \mu_c(Q) + \mu_p(Q)$ für alle $Q \in \mathfrak{Q}$. Also ist auf $\mathfrak{Q}$ μ_c der σ -additive und μ_p der rein-endlich-additive Teil von μ .

Korollar. Auf $\mathfrak{Z}$ ist $f \mapsto \int f d\mu_c$ der stetige und $f \mapsto \int f d\mu_p$ der rein-unstetige Teil des auf $\mathfrak{S}$ definierten Funktional $f \mapsto \int f d\mu$.

Beweis. Es ist $\int f d\mu = \int f d\mu_c + \int f d\mu_p$ für jede Funktion $f \in \mathfrak{S}$, da auf $\mathfrak{M}$ die Gleichung $\bar{I} = \bar{I}_c + \bar{I}_p$ gilt. Das auf $\mathfrak{Z}$ definierte, positive, lineare Funktional $f \mapsto \int f d\mu_c$ ist als Verengung des stetigen Funktional $\bar{I}_c|_{\mathfrak{M}}$ selbst stetig. Um zu zeigen, daß das auf $\mathfrak{Z}$ definierte, positive, lineare Funktional $f \mapsto \int f d\mu_p$ rein-unstetig ist, sei $K|_{\mathfrak{Z}}$ ein stetiges, positives, lineares Funktional mit $0 \leq K(f) \leq \int f d\mu_p$ für alle $f \geq 0$ aus $\mathfrak{Z}$. Setzen wir $\kappa(Q) = K(\chi_Q)$ für jedes $Q \in \mathfrak{Q}$, so ist $\kappa|_{\mathfrak{Q}}$ σ -additiv und es gilt $0 \leq \kappa(Q) \leq \mu_p(Q)$ für alle $Q \in \mathfrak{Q}$. Nach der Behauptung II von Satz 4 ist also $\kappa = 0$. Dann ist aber $K = 0$ auf $\mathfrak{Z}$, da aus der für alle $f \geq 0$ aus $\mathfrak{S}$ gültigen Ungleichung $0 \leq K(f) \leq \int f d\mu_p$ folgt $\mathfrak{Z} \subseteq \mathfrak{B}(\mathfrak{S}, K)$ und somit die Fortsetzung von $K|_{\mathfrak{S}}$ zu einem positiven, linearen Funktional auf $\mathfrak{B}(\mathfrak{S}, K)$ eindeutig bestimmt ist. Also ist das Funktional $f \mapsto \int f d\mu_p$ rein-unstetig.

Nach Satz 3 sind die Funktionen aus $\mathfrak{M}$ in bezug auf jedes auf $\mathfrak{M}$ definierte, positive, lineare Funktional uneigentlich Riemann-integrierbar. Insbesondere existiert also $\int^{(u)} f d\mu_c$ für jedes $f \in \mathfrak{M}$. Über dieses auf $\mathfrak{M}$ definierte Funktional behaupten wir:

Satz 5. I. Für jede Funktion $f \in \mathfrak{M}$ gilt

$$(19) \quad I_c(f) = \int^{(u)} f d\mu_c.$$

II. Das auf $\mathfrak{M}$ definierte, positive, lineare Funktional $f \mapsto \int f d\mu$ hat $f \mapsto \int f d\mu_c$ zum stetigen und $f \mapsto \int f d\mu_p$ zum rein-unstetigen Teil.

Beweis. Zu I. Es genügt die Gleichung $I_c(f) = \int^{(u)} f d\mu_c$ für jede nicht negative Funktion $f \in \mathfrak{M}$ zu beweisen. Es sei also $f \in \mathfrak{P}$ nicht negativ und außerdem vorerst beschränkt: $0 \leq f(x) \leq K$ für alle $x \in E$. Dann existiert eine Folge $\{g_n\}_{n=1,2,\dots}$ von Funktionen aus $\mathfrak{Z}$ mit $g_n \uparrow f$. Nach Satz 1 gibt es nämlich eine Folge $\{\alpha_n\}_{n=1,2,\dots}$ reeller Zahlen mit $\alpha_1 > \alpha_2 > \dots > 0$ und $\lim \alpha_n = 0$ derart, daß $Q_n = [f > \alpha_n]$ für jedes n I -quadrierbar ist. Die Folge der Funktionen $g_n = \min(f, K \chi_{Q_n})$ leistet dann das Verlangte (wegen (11) ist $g_n \in \mathfrak{Z}$). Nach Satz 4, Beh. I ist I_c auf $\mathfrak{M}$ stetig; folglich gilt $I_c(f) = \sup I_c(g_n) = \sup \int g_n d\mu_c \leq \int^{(u)} f d\mu_c$. Da nach (13) andererseits $\int^{(u)} f d\mu_c \leq I_c(f)$ ist, ist damit die behauptete Gleichung bewiesen.

Nummehr sei f eine beliebige nicht negative Funktion aus $\mathfrak{M}$. Dann ist $f_n = \min(n, f)$, $n = 1, 2, \dots$, eine Folge beschränkter, nicht negativer Funktionen aus $\mathfrak{M}$ mit $f_n \uparrow f$; also gilt $I_c(f) = \sup I_c(f_n) = \sup \int^{(u)} f_n d\mu_c \leq \int^{(u)} f d\mu_c$ nach dem bisher Bewiesenen. Wegen (13) gilt also auch in diesem Falle (19).

Aus dem Beweis von Gl. (19) entnehmen wir noch das für das Folgende nützliche Ergebnis: Für jede Funktion $f \geq 0$ aus $\mathfrak{R}$ ist

$$(20a) \quad \int^{(u)} f d\mu_c = \sup \left(\int g d\mu_c; g \leq f, g \in \mathfrak{S} \right).$$

Zu II. Nach I. ist das auf $\mathfrak{R}$ definierte, positive, lineare Funktional $f \rightarrow \int^{(u)} f d\mu_c$ stetig. Das auf $\mathfrak{R}$ definierte, positive, lineare Funktional $f \rightarrow \int^{(u)} f d\mu_p$ ist rein-unstetig, da $0 \leq \int^{(u)} f d\mu_p \leq I_p(f)$ für jede Funktion $f \geq 0$ aus $\mathfrak{R}$ gilt. Es verbleibt also der Beweis der Gleichung $\int^{(u)} f d\mu = \int^{(u)} f d\mu_c + \int^{(u)} f d\mu_p$ für jedes $f \geq 0$ aus $\mathfrak{R}$. Hierzu zeigen wir, daß neben (20a) auch

$$(20b) \quad \int^{(u)} f d\mu_p = \sup \left(\int g d\mu_p; g \leq f, g \in \mathfrak{S} \right)$$

für alle $f \geq 0$ aus $\mathfrak{R}$ gilt. Die behauptete Gleichung folgt dann nämlich so: Es bezeichne Φ die steigend gerichtete Menge aller Funktionen $g \in \mathfrak{S}$ mit $g \leq f$; dann ist

$$\int^{(u)} f d\mu = \lim_{\Phi} \int g d\mu = \lim_{\Phi} \int g d\mu_c + \lim_{\Phi} \int g d\mu_p = \int^{(u)} f d\mu_c + \int^{(u)} f d\mu_p.$$

Wir haben also nur noch den Beweis von (20b) nachzutragen. Es sei hierzu $Q \in \mathfrak{Q}_c$ mit $\chi_Q \leq f$. Nach Satz 1 ist dann die Menge $Q' = [f > \alpha]$ für ein geeignetes α mit $0 < \alpha < 1$ Element von $\mathfrak{Q}$. Nach (11) ist $g = \min(f, \chi_{Q'})$ eine Funktion aus $\mathfrak{S}$; für diese gilt $\chi_Q \leq g \leq f$. — Aus der Definition der Riemann-integrierbaren Funktionen folgt unmittelbar die Gleichung

$$\int^{(u)} f d\mu_p = \sup \left(\int g d\mu_p; g \leq f, g \in \mathfrak{S}_p \right),$$

wenn $\mathfrak{S}_p$ die Menge der $\mathfrak{Q}_p$ -Treppenfunktionen bezeichnet. Die Gl. (20b) ist daher bewiesen, wenn gezeigt ist, daß zu beliebigem $g \in \mathfrak{S}_p$ mit $0 \leq g \leq f$ stets ein $g' \in \mathfrak{S}$ mit $g \leq g' \leq f$ existiert. Es kann g dargestellt werden in der

Form $g = \sum_{v=1}^n \lambda_v \chi_{Q_v}$ mit paarweise fremden Mengen $Q_v \in \mathfrak{Q}_p$ und reellen Zahlen $\lambda_v > 0$. Wegen $\chi_{Q_v} \leq \frac{1}{\lambda_v} f$ existiert, wie bereits bewiesen wurde, eine Funktion $g_v \in \mathfrak{S}$ mit $\chi_{Q_v} \leq g_v \leq \frac{1}{\lambda_v} f$. Setzen wir also $g' = \max(\lambda_1 g_1, \dots, \lambda_n g_n)$, so ist g' eine Funktion aus $\mathfrak{S}$, die das Verlangte leistet.

Damit ist der Satz 5 vollständig bewiesen.

Im folgenden Satz vergleichen wir die auf $\mathfrak{R}$ definierten Funktionale I und $f \rightarrow \int^{(u)} f d\mu$ hinsichtlich der sich aus ihnen ableitenden Riemann-Integrale.

Satz 6. I. Die auf $\mathfrak{R}$ definierten, positiven, linearen Funktionale I und $f \rightarrow \int^{(u)} f d\mu$ führen zur gleichen Menge $\mathfrak{S}$ Riemann-integrierbarer Funktionen und zum gleichen Riemann-Integral über $\mathfrak{S}$.

II. Das auf $\mathfrak{R}$ definierte, positive, lineare Funktional $f \rightarrow D(f) = I(f) - \int^{(u)} f d\mu$ ist rein-unstetig. Bezüglich D sind genau diejenigen Funktionen auf E Riemann-

integrierbar, welche beschränkt und im Komplement einer I -quadrierbaren Menge gleich Null sind. Für jede solche Funktion ist das Riemann-Integral bezüglich D gleich Null.

Beweis. Zu I. Wir setzen $L(f) = \int f d\mu$ für jedes $f \in \mathfrak{R}$. Dann sei $\mathfrak{Q}_L$ das System der L -quadrierbaren Mengen und μ_L $\mathfrak{Q}_L$ der sich aus L ableitende Inhalt. Es genügt zu zeigen, daß $\mathfrak{Q} = \mathfrak{Q}_L$ und $\mu = \mu_L$ ist. Zunächst ist $\mathfrak{Q} \subseteq \mathfrak{Q}_L$, da nach (13) $0 \leq L(f) \leq I(f)$ für alle $f \geq 0$ aus $\mathfrak{R}$ gilt. Ferner ist $\mu(Q) = \mu_L(Q)$ für jede Menge $Q \in \mathfrak{Q}$, da einerseits $f \rightarrow \bar{I}(f)$ bzw. $f \rightarrow \int f d\mu$ die einzige Fortsetzung von I bzw. L zu einem positiven, linearen Funktional auf $\bar{\mathfrak{R}}$ und andererseits $\int f d\mu = \int f d\mu$ für alle $f \in \mathfrak{S}$, also insbesondere für $f = \chi_Q$ ist. Es sei Q nun eine Menge aus $\mathfrak{Q}_L$; dann gibt es zu beliebigem $\varepsilon > 0$ Funktionen $g, h \in \mathfrak{R}$ mit $0 \leq g \leq \chi_Q \leq h$ und $L(h - g) \leq \varepsilon$. Zu g existiert nach (9) ein $g' \in \mathfrak{S}$ mit $g' \leq g$ und $L(g) - \int g' d\mu \leq \varepsilon$. Ferner beweist man wie im Beweis der Behauptung II von Satz 5 die Existenz einer Funktion $h' \in \mathfrak{S}$ mit $\chi_Q \leq h' \leq h$. Also gilt $g' \leq \chi_Q \leq h'$ und $\int (h' - g') d\mu \leq L(h) - \int g' d\mu \leq L(h - g) + \varepsilon \leq 2\varepsilon$. Hieraus folgt $Q \in \mathfrak{Q}$ wegen der Vollständigkeit des Funktional $f \rightarrow \int f d\mu$ auf $\mathfrak{S}$. Also ist $\mathfrak{Q} = \mathfrak{Q}_L$ und $\mu = \mu_L$.

Zu II. Nach Satz 5 ist $D(f) = I_c(f) + I_p(f) - \int f d\mu_c - \int f d\mu_p = I_p(f) - \int f d\mu_p$; da also $0 \leq D(f) \leq I_p(f)$ für alle $f \geq 0$ aus $\mathfrak{R}$ gilt, ist D rein-unstetig. Nach der letzten Ungleichung ist ferner die Vervollständigung $\bar{I}, \bar{\mathfrak{R}}$ von I Verengung der Vervollständigung $\bar{D}, \bar{\mathfrak{B}}(\mathfrak{R}, D)$ von D , insbesondere ist $\bar{\mathfrak{R}} \subseteq \bar{\mathfrak{B}}(\mathfrak{R}, D)$. Da die Fortsetzung von D zu einem linearen Funktional auf $\mathfrak{B}(\mathfrak{R}, D)$ nur auf genau eine Weise möglich ist, gilt daher $\bar{D}(f) = \bar{I}_p(f) - \int f d\mu_p$ für jedes $f \in \bar{\mathfrak{R}}$. Also ist $\bar{D}(f) = 0$ für jedes $f \in \mathfrak{Z}$. Hieraus folgt, daß jede I -quadrierbare Menge Q und mit ihr jede Teilmenge Q' von Q D -quadrierbar ist; bezeichnet δ den zu D gehörigen Inhalt, so ist $\delta(Q') = \bar{D}(\chi_{Q'}) \leq \bar{D}(\chi_Q) = 0$, also $\delta(Q') = 0$ für jede solche Menge Q' . Ist umgekehrt Q' eine beliebige D -quadrierbare Menge, so existiert eine I -quadrierbare Menge Q mit $Q' \subset Q$ und es gilt folglich wieder $\delta(Q') = 0$. Zu Q' existiert nämlich ein $h \in \mathfrak{R}$ mit $\chi_{Q'} \leq h$ und hierzu eine reelle Zahl α mit $0 < \alpha < 1$ derart, daß $Q = [h > \alpha]$ I -quadrierbar ist; diese Menge leistet das Verlangte. Somit ist das System der D -quadrierbaren Mengen gleich dem System der Teilmengen Q' beliebiger I -quadrierbarer Mengen Q ; für jede D -quadrierbare Menge Q' gilt $\delta(Q') = 0$. Hieraus folgt die Behauptung (z.B. nach Satz 2).

§ 3. Riemann-Integrierbarkeit bezüglich eines linearen Funktional. Konkreter Fall

3.1. Die in den beiden vorhergehenden Paragraphen gewonnenen Ergebnisse wenden wir nun auf folgenden Spezialfall an:

Die Menge E sei ein lokal kompakter¹³⁾, topologischer Raum. Die Elemente von $\mathfrak{R}$ seien auf E definierte, stetige, (endliche) reelle Funktionen, welche

¹³⁾ Im folgenden bedeutet „kompakt“ stets genauer „bikompakt und Hausdorffsch“.

im Unendlichen verschwinden, d.h. für jede solche Funktion g und jede reelle Zahl $\alpha > 0$ ist die Urbildmenge $[|g| \geq \alpha]$ kompakt. Hieraus folgt insbesondere die Beschränktheit einer jeden Funktion $g \in \mathfrak{R}$. Die Funktionenmenge $\mathfrak{R}$ besitze wiederum die Eigenschaften (1) bis (3) und genüge daneben noch folgenden zwei Zusatzforderungen:

- (21) Zu jedem Punkt $x \in E$ existiert eine Funktion $g \in \mathfrak{R}$ mit $g(x) \neq 0$.
 (22) Zu je zwei verschiedenen Punkten $x, y \in E$ existiert eine Funktion $h \in \mathfrak{R}$ mit $h(x) \neq h(y)$.

Beispielsweise genügt die Menge $\mathfrak{R} = \mathfrak{R}(E)$ aller stetigen, reellen Funktionen $g|E$ mit kompaktem Träger¹⁴⁾ den Bedingungen (1) bis (3) sowie (21) und (22).

Aus den genannten Eigenschaften von $\mathfrak{R}$ folgt

Lemma 4. Zu jeder stetigen, im Unendlichen verschwindenden, reellen Funktion $f|E$ existiert eine gleichmäßig gegen f konvergente Folge $\{g_n\}_{n=1,2,\dots}$ von Funktionen aus $\mathfrak{R}$ mit der Eigenschaft (4).

Beweis. Die Menge $\mathfrak{A}$ der auf E definierten, durch Funktionen aus $\mathfrak{R}$ gleichmäßig approximierbaren Funktionen besteht aus stetigen, im Unendlichen verschwindenden Funktionen und ist nach Lemma 1 eine Algebra. Wegen $\mathfrak{R} \subseteq \mathfrak{A}$ besitzt $\mathfrak{A}$ die Eigenschaften (21) und (22) von $\mathfrak{R}$. Nach einem Approximationssatz von NAKANO [15]¹⁵⁾ kann daher jede stetige, im Unendlichen verschwindende Funktion auf E durch Funktionen aus $\mathfrak{A}$ gleichmäßig approximiert werden. Da $\mathfrak{A}$ bezüglich gleichmäßiger Konvergenz abgeschlossen ist, so ist also $\mathfrak{A}$ das System aller stetigen, im Unendlichen verschwindenden Funktionen auf E . Die Behauptung folgt daher aus Lemma 1.

3.2. Neben E und $\mathfrak{R}$ sei wie bisher ein auf $\mathfrak{R}$ definiertes, positives, lineares Funktional I vorgegeben. Gemäß § 1 leiten sich aus I ab: Das System $\mathfrak{Q}$ der I -quadrierbaren Teilmengen von E , der Inhalt $\mu| \mathfrak{Q}$ und das System $\mathfrak{S}$ aller bezüglich I Riemann-integrierbaren Funktionen.

Wir behaupten von $\mu| \mathfrak{Q}$ die folgenden vier Eigenschaften: (1) jede Menge $Q \in \mathfrak{Q}$ ist relativ kompakt, d.h. es ist $\bar{Q}$ ¹⁶⁾ kompakt; (2) in $\mathfrak{Q}$ ist eine offene Basis von E enthalten; (3) mit Q sind auch $\bar{Q}$ und $\underline{Q}$ Elemente von $\mathfrak{Q}$ und es ist $\mu(Q) - \mu(\bar{Q}) = \mu(\underline{Q})$; (4) zu jeder Menge $Q \in \mathfrak{Q}$ und jeder reellen Zahl $\varepsilon > 0$ existiert eine offene Menge $U \in \mathfrak{Q}$ mit $Q \subseteq U$ und $\mu(U - Q) \leq \varepsilon$.

Nach HAUPT und PAUC [11] sind bei Gültigkeit von (1) und (2) die beiden Eigenschaften (3) und (4) äquivalent mit den beiden folgenden: (3') für jedes $Q \in \mathfrak{Q}$ ist $\bar{Q} - \underline{Q} \in \mathfrak{Q}$; (4') zu jeder Menge $Q \in \mathfrak{Q}$ und zu jedem $\varepsilon > 0$ existiert eine offene Menge $U \in \mathfrak{Q}$ mit $\bar{Q} - \underline{Q} \subseteq U$ und $\mu(U) \leq \varepsilon$. Ein Inhalt $\mu| \mathfrak{Q}$ mit den Eigenschaften (1), (2), (3') und (4') heißt nach HAUPT-PAUC [11] an

¹⁴⁾ Als Träger einer reellen Funktion $g|E$ bezeichnet man die abgeschlossene Hülle der Menge $[g \neq 0]$.

¹⁵⁾ Vgl. hierzu auch NÖBELING und BAUER [17], S. 72.

¹⁶⁾ Mit $\bar{A}$ bezeichnen wir die abgeschlossene Hülle, mit $\underline{A}$ den offenen Kern einer Menge $A \subseteq E$.

(die Topologie von) E adaptiert. Unsere Behauptung kann also auch so ausgesprochen werden:

Satz 7. *Der Inhalt $\mu|\mathfrak{Q}$ ist an E adaptiert.*

Beweis. Wir zeigen, daß $\mu|\mathfrak{Q}$ die Eigenschaften (1) bis (4) besitzt. — Zu (1). Zu einer Menge $Q \in \mathfrak{Q}$ existiert eine Funktion $h \in \mathfrak{H}$ mit $\chi_Q \leq h$; folglich ist $Q \subseteq [h \geq 1]$. Da h stetig ist und im Unendlichen verschwindet, ist $[h \geq 1]$ kompakt, also Q relativ kompakt. — Zu (2). Es sei V eine offene Menge in E und x_0 ein Punkt von V . Zu zeigen ist die Existenz einer offenen Menge $U \in \mathfrak{Q}$ mit $x_0 \in U$ und $U \subseteq V$. Zu x_0 und V existiert eine stetige Funktion $f \in E$ mit $0 \leq f \leq 1$, $f(x_0) = 1$ und in V enthaltenem kompakten Träger (vgl. [8], S. 49). Nach Lemma 4 gibt es zu f eine Funktion $g \in \mathfrak{H}$ mit $0 \leq g \leq f \leq g + \frac{1}{2}$ und weiter nach Satz 1 eine reelle Zahl α mit $0 < \alpha < \frac{1}{2}$, für welche die offene Urbildmenge $U = [g > \alpha]$ ein Element von $\mathfrak{Q}$ ist. Aus $f(x_0) = 1$ folgt $g(x_0) \geq \frac{1}{2}$; also ist $x_0 \in U$. Für einen beliebigen Punkt $x \in U$ ist $f(x) \geq g(x) > \alpha > 0$; da f im Komplement von V gleich Null ist, gilt also $x \in V$. Folglich ist $U \subseteq V$. Die Menge U leistet somit das Verlangte. — Zu (3). Es sei Q eine Menge aus $\mathfrak{Q}$, g und h seien Funktionen aus $\mathfrak{H}$ mit $g \leq \chi_Q \leq h$. Wegen der Stetigkeit von g und h gilt dann auch $g \leq \chi_Q \leq \chi_Q \leq \chi_{\bar{Q}} \leq h$. Hieraus und aus der Definition von μ folgt, daß $\bar{Q}$ und $\underline{Q}$ quadrierbare Mengen mit $\mu(\bar{Q}) = \mu(Q) = \mu(Q)$ sind. — Zu (4). Es sei Q eine quadrierbare Menge. Zu einer beliebig reellen Zahl η mit $0 < \eta < 1$ existiert dann ein $h \in \mathfrak{H}$ mit $\chi_Q \leq h$ und $I(h) \leq \mu(Q) + \eta$. Nach Satz 1 gibt es eine Zahl η' mit $0 < \eta' \leq \eta$ derart, daß die offene Urbildmenge $U = [h > 1 - \eta']$ quadrierbar ist. Wir behaupten, daß $Q \subseteq U$ und $\mu(U - Q) \leq \frac{\eta}{1 - \eta'} (1 + \mu(Q))$ ist; hieraus folgt dann (4). Aus $x \in Q$ folgt $h(x) \geq 1 > 1 - \eta'$ und hieraus $x \in U$; also ist $Q \subseteq U$. Nach Definition von U ist $(1 - \eta') \chi_U \leq h$ und daher $(1 - \eta') \mu(U) \leq I(h)$. Hieraus ergibt sich $(1 - \eta') \mu(U) \leq (1 - \eta') \mu(U) \leq I(h) \leq \mu(Q) + \eta$ und weiter $(1 - \eta) \mu(U - Q) = (1 - \eta) (\mu(U) - \mu(Q)) \leq \mu(Q) + \eta - (1 - \eta) \mu(Q) = \eta(1 + \mu(Q))$. Es gilt also $\mu(U - Q) \leq \frac{\eta}{1 - \eta'} (1 + \mu(Q))$, wie behauptet. — Damit ist der Satz bewiesen.

Allein aus der Adaption von $\mu|\mathfrak{Q}$ an E ergeben sich nun unter anderem die im folgenden Korollar genannten Eigenschaften von μ und $\mathfrak{Q}$.

Korollar. I. *Zu jeder kompakten Menge K und jeder offenen Menge U mit $K \subseteq U$ existiert eine Menge $Q \in \mathfrak{Q}$ mit $K \subseteq Q \subseteq U$.*

II. *Zu jeder Menge $Q \in \mathfrak{Q}$ sowie zu beliebigem $\varepsilon > 0$ existieren eine kompakte Menge $K \in \mathfrak{Q}$ und eine offene Menge $U \in \mathfrak{Q}$ mit $K \subseteq Q \subseteq U$ und $\mu(U - K) < \varepsilon$.*

Beweis. Vgl. HAUPT-PAUC [11], S. 192.

3.3. Nach 3.2 genügt $\mathfrak{Q}$ den bei BOURBAKI [8], S. 164–165 genannten Bedingungen (PC_I), (PC_{II}) und $\mu|\mathfrak{Q}$ den Bedingungen (PM_I), (PM_{II}). Folglich existiert nach Bourbaki genau ein positives Radonsches Maß ϱ auf E , in bezug auf welches alle Mengen $Q \in \mathfrak{Q}$ ϱ -integrierbar mit $\varrho(Q) = \mu(Q)$ sind.

Dieses eindeutig bestimmte Radonsche Maß läßt sich auch wie folgt kennzeichnen¹⁷⁾:

Satz 8. Jede auf E stetige Funktion mit kompaktem Träger ist Riemann-integrierbar bezüglich I . Das somit auf $\mathfrak{R}(E)$ definierte lineare Funktional $f \rightarrow \int f d\mu$ ist das einzige positive Radonsche Maß ϱ auf E , in bezug auf welches jede Menge $Q \in \mathfrak{D}$ ϱ -integrierbar mit $\varrho(Q) = \mu(Q)$ ist. Allgemeiner ist jede bezüglich I Riemann-integrierbare Funktion f sowohl ϱ -integrierbar als auch bezüglich ϱ Riemann-integrierbar¹⁸⁾ und es ist

$$(23) \quad \int f d\varrho = \int f d\mu;$$

in dieser Gleichung kann $\int f d\varrho$ sowohl als ϱ -Integral als auch als Riemann-Integral bezüglich ϱ gedeutet werden.

Beweis. Es sei f eine Funktion aus $\mathfrak{R}(E)$ und K der kompakte Träger von f . Nach dem Korollar zu Satz 7 gibt es dann eine Menge $Q \in \mathfrak{D}$ mit $K \subseteq Q$. Nach Lemma 4 kann f durch Funktionen aus $\mathfrak{R}$ gleichmäßig approximiert werden. Also folgt aus dem Korollar 2 zu Satz 2 und aus Lemma 2, daß f Riemann-integrierbar bezüglich I ist. Setzen wir $\int f d\varrho = \int f d\mu$ für jedes $f \in \mathfrak{R}(E)$, so ist offenbar ϱ ein positives Radonsches Maß auf E . Daß jede Menge $Q \in \mathfrak{D}$ ϱ -integrierbar mit $\varrho(Q) = \mu(Q)$ ist, ergibt sich aus der jetzt zu beweisenden, allgemeineren Aussage: Jede Funktion $f \in \mathfrak{Z}$ ist ϱ -integrierbar und zugleich bezüglich ϱ Riemann-integrierbar; es gilt (23). Hierzu kann ohne Beschränkung der Allgemeinheit $f \geq 0$ vorausgesetzt werden. Da f im Komplement einer I -quadrierbaren Menge gleich Null ist, existiert nach

¹⁷⁾ Bezüglich der im folgenden verwendeten Begriffe aus der Theorie Radonscher Maße sei auf BOURBAKI [8] verwiesen. Ein positives Radonsches Maß ϱ auf E ist demnach ein positives, lineares Funktional auf der Menge $\mathfrak{R}(E)$ aller stetigen Funktionen $f|E$ mit kompaktem Träger, wobei $\int f d\varrho$ für $\varrho(f)$ steht und den Funktionswert von ϱ an der Stelle $f \in \mathfrak{R}(E)$ bezeichnet. Nach BOURBAKI definiert man für jede nicht negative Funktion $q|E$ das ϱ -Oberintegral $\int^* q d\varrho$. Es erweist sich dann $N^*(f) = \int^* f| d\varrho$ als Quasi-Norm im System aller Funktionen $f|E$. Eine Funktion $f|E$ heißt ϱ -integrierbar, wenn $N^*(f) < +\infty$ ist und eine Folge von Funktionen $f_n \in \mathfrak{R}(E)$ mit $\lim_{n \rightarrow \infty} N^*(f - f_n) = 0$ existiert; man setzt $\int f d\varrho = N^*(f^+) - N^*(f^-)$. Eine Teilmenge A von E , deren charakteristische Funktion χ_A ϱ -integrierbar ist, wird selbst als ϱ -integrierbar bezeichnet; man setzt $\varrho(A) = \int \chi_A d\varrho$. Nachträglich erweist sich dann $\int f d\varrho$ als Unterteilungsintegral nach dieser Mengenfunktion. — Wendet man dagegen auf das auf $\mathfrak{R}(E)$ definierte Funktional $f \rightarrow \int f d\varrho$ den sog. ersten (mit Folgen und nicht mit gerichteten Systemen arbeitenden) Erweiterungsprozeß von STONE [21] (vgl. auch [12b], S. 130ff.) an, so gewinnt man ein für alle nicht negativen Funktionen $q|E$ erklärtes „schwaches“ ϱ -Oberintegral $\int q d\varrho$. Aus diesem leiten sich analog eine Quasi-Norm $N(f) = \int f| d\varrho$ über dem System aller Funktionen $f|E$ und ein Integralbegriff ab. Jede im Sinne von STONE ϱ -integrierbare Funktion ist auch im Sinne von BOURBAKI ϱ -integrierbar und die zugehörigen Integrale sind einander gleich. Wenn im folgenden von einer Funktion oder Menge (d.h. also von deren charakteristischen Funktionen) die ϱ -Integrierbarkeit behauptet wird, so kann hierbei, ohne daß dies eigens betont wird, „ ϱ -integrierbar“ sowohl im Sinne von STONE als auch im Sinne von BOURBAKI verstanden werden. Die Beweise sind dementsprechend angelegt.

¹⁸⁾ „Bezüglich ϱ Riemann-integrierbar“ soll genauer heißen „bezüglich des auf $\mathfrak{R}(E)$ definierten Funktional $f \rightarrow \int f d\varrho$ Riemann-integrierbar“.

Lemma 2 eine nicht negative Funktion $h_0 \in \mathfrak{R}$ derart, daß für jedes $x \in E$ aus $h_0(x) < 1$ folgt $f(x) = 0$. Nach Lemma 4, angewandt auf $\mathfrak{R}(E)$ an Stelle von $\mathfrak{R}$, folgt die Existenz einer Funktion $h'_0 \in \mathfrak{R}(E)$ mit $0 \leq h'_0 \leq 2h_0 \leq h'_0 + 1$. Auch diese Funktion besitzt dann die Eigenschaft, daß aus $h'_0(x) < 1$ stets $f(x) = 0$ folgt. Da f in der Vervollständigung $\overline{\mathfrak{R}}$ von $\mathfrak{R}$ bezüglich I liegt, gibt es zu jeder reellen Zahl $\varepsilon > 0$ Funktionen $g, h \in \mathfrak{R}$ mit $0 \leq g \leq f \leq h$ und $I(h - g) \leq \varepsilon$. Mit f besitzt auch g einen kompakten Träger, d.h. es ist $g \in \mathfrak{R}(E)$. Durch erneute Anwendung von Lemma 4 ergibt sich die Existenz einer Funktion $h' \in \mathfrak{R}(E)$ mit $0 \leq h' \leq h \leq h' + \varepsilon$. Setzt man $g'' = g$ und $h'' = h' + \varepsilon h'_0$, so sind g'' und h'' Funktionen aus $\mathfrak{R}(E)$, nach Wahl von h'_0 gilt $g'' \leq f \leq h''$ und es ist $\int (h'' - g'') d\varrho = \int (h' - g) d\mu + \varepsilon \int h'_0 d\mu \leq I(h - g) + 2\varepsilon I(h_0) \leq \varepsilon(1 + 2I(h_0))$. Also ist f bezüglich ϱ Riemann-integrierbar. Wegen $\int g'' d\varrho = \int g' d\mu$ und $\int h'' d\varrho = \int h' d\mu$ gilt (23) in dem Sinne, daß $\int f d\varrho$ das Riemann-Integral von f bezüglich ϱ bedeutet. Nun ist aber $\int (f - g'') d\varrho \leq \int (h'' - g'') d\varrho$ und $g'' \in \mathfrak{R}(E)$; also ist f auch ϱ -integrierbar und in (23) kann $\int f d\varrho$ auch als ϱ -Integral gedeutet werden.

Korollar. Die Funktionale $I: \mathfrak{R} \rightarrow \mathbb{R}$ und $\int f d\varrho: \mathfrak{R}(E) \rightarrow \mathbb{R}$ führen zum gleichen an E adaptierten Inhalt, zur gleichen Menge $\mathfrak{Z}$ Riemann-integrierbarer Funktionen und zum gleichen Riemann-Integral über $\mathfrak{Z}$. Es ist $\mathfrak{Z}$ gleich der Vervollständigung von $\mathfrak{R}(E)$ bezüglich ϱ .

Beweis. Bezeichnet wie bisher $\mathfrak{Z}$ die Menge der bezüglich I Riemann-integrierbaren Funktionen, so ist nach Satz 8 $\mathfrak{R}(E) \subseteq \mathfrak{Z}$ und $\int f d\varrho = \int f d\mu$ für jede Funktion $f \in \mathfrak{R}(E)$. Da $\mathfrak{Z}$ bezüglich des über $\mathfrak{Z}$ definierten Funktionals $f \mapsto \int f d\mu$ vollständig ist, ergibt sich hieraus $\overline{\mathfrak{R}(E)} \subseteq \mathfrak{Z}$, wenn $\overline{\mathfrak{R}(E)}$ die Vervollständigung von $\mathfrak{R}(E)$ bezüglich ϱ bezeichnet. Es gilt sogar $\overline{\mathfrak{R}(E)} = \mathfrak{Z}$, da nach Satz 8 jede Funktion aus $\mathfrak{Z}$ auch bezüglich ϱ Riemann-integrierbar, also jedenfalls ein Element von $\overline{\mathfrak{R}(E)}$ ist. Aus der Gleichung $\overline{\mathfrak{R}(E)} = \mathfrak{Z}$ und Satz 8 folgt aber der Rest der Behauptung.

Bemerkung. Nach dem zuletzt bewiesenen Korollar bedeutet es keine Beschränkung der Allgemeinheit, die Theorie des Riemann-Integrals in lokal kompakten Räumen nur für Radonsche Maße zu entwickeln, wie dies HAUPT und PAUC in [10], [19], [12b], S. 174ff., für kompakte und in einer in Vorbereitung befindlichen Arbeit auch für lokal kompakte Räume getan haben. Ausgangspunkt der Untersuchungen von Haupt-Pauc ist dabei allerdings ein an den Raum adaptierter Inhalt. Vermöge der Bemerkung am Beginn der Nr. 3.3 entsprechen sich aber adaptierte Inhalte und positive Radonsche Maße in umkehrbar eindeutiger Weise.

3.4. Da Riemann-Integrierbarkeit bezüglich I dasselbe wie Riemann-Integrierbarkeit bezüglich ϱ bedeutet, ist zu erwarten, daß sich die von PAUC [19] für den Fall eines kompakten Raumes angegebene Kennzeichnung der Riemann-integrierbaren Funktionen als fast überall stetige Funktionen auch auf den Fall eines lokal kompakten Raumes übertragen läßt.

Satz 9. I -quadrierbar sind genau die relativ kompakten Teilmengen Q von E , deren Begrenzung $\overline{Q} - Q$ eine ϱ -Nullmenge ist. Riemann-integrierbar

bezüglich I sind genau die beschränkten, q -fast überall stetigen Funktionen auf E mit kompaktem Träger¹⁹⁾.

Beweis. Nach der Adaptionseigenschaft (1) von S. 462 ist eine I -quadrierbare Menge Q stets relativ kompakt; nach der Adaptionseigenschaft (3) ist $\bar{Q} - \underline{Q} \in \mathfrak{Q}$ und $\mu(\bar{Q} - \underline{Q}) = 0$. Aus Satz 8 folgt daher, daß $\bar{Q} - \underline{Q}$ eine q -Nullmenge ist. Ist umgekehrt Q eine relativ kompakte Menge mit $q(\bar{Q} - \underline{Q}) = 0$, so existiert zu jedem $\varepsilon > 0$ eine offene Menge $U \in \mathfrak{Q}$ mit $\bar{Q} - \underline{Q} \subseteq U$ und $\mu(U) = q(U) \leq \varepsilon$. Wegen der Vollständigkeit des Inhalts μ folgt hieraus nach HAUPT-PAUC [11], S. 193 die I -Quadrierbarkeit von Q . Damit ist die erste Hälfte der Behauptung bewiesen. — Nunmehr sei f eine bezüglich I Riemannintegrierbare Funktion. Dann ist jedenfalls f beschränkt, ferner besitzt f einen kompakten Träger, da f im Komplement einer Menge $Q \in \mathfrak{Q}$ gleich Null und Q relativ kompakt ist. Es bezeichne $w(x)$ die Schwankung von f in einem Punkte $x \in E$; für ein $\gamma > 0$ sei F_γ die Urbildmenge $[w \geq \gamma]$. Zu beliebigem $\varepsilon > 0$ existieren paarweise fremde Mengen $Q_1, \dots, Q_n \in \mathfrak{Q}$ sowie reelle Zahlen α_ν, β_ν ($\nu = 1, \dots, n$) mit $\sum_{\nu=1}^n \alpha_\nu \chi_{Q_\nu} \leq f \leq \sum_{\nu=1}^n \beta_\nu \chi_{Q_\nu}$ und $\sum_{\nu=1}^n (\beta_\nu - \alpha_\nu) \mu(Q_\nu) \leq \varepsilon$. Es

sei J die Menge aller Indizes $\nu = 1, \dots, n$, für welche der offene Kern $\underline{Q}_\nu$ von Q_ν mit F_γ einen nicht leeren Durchschnitt hat. Für jeden Punkt $x \in \underline{Q}_\nu \cap F_\gamma$ ist dann $\underline{Q}_\nu$ eine Umgebung von x und daher $\beta_\nu - \alpha_\nu \geq w(x) \geq \gamma$; also gilt $\beta_\nu - \alpha_\nu \geq \gamma$ für jedes $\nu \in J$. Hieraus folgt $\sum_{\nu \in J} \mu(Q_\nu) \leq \frac{1}{\gamma} \sum_{\nu \in J} (\beta_\nu - \alpha_\nu) \mu(Q_\nu) \leq \frac{\varepsilon}{\gamma}$.

Ferner gilt $F_\gamma \subseteq \bigcup_{\nu=1}^n \bar{Q}_\nu$, da zu jedem Punkt $x \in \bigcup_{\nu=1}^n \bar{Q}_\nu$ eine Umgebung U von x mit $U \cap \bigcup_{\nu=1}^n \bar{Q}_\nu = \emptyset$ existiert und somit $w(x) = 0$ ist. Wir erhalten daher die Relation $F_\gamma - \bigcup_{\nu \in J} \bar{Q}_\nu \subseteq N$, wobei $N = \bigcup_{\nu=1}^n (\bar{Q}_\nu - \underline{Q}_\nu)$ nach dem ersten Teil des Beweises I -quadrierbar mit $\mu(N) = q(N) = 0$ ist. Setzen wir $Q_0 = \bigcup_{\nu \in J} Q_\nu$, so ist $F_\gamma \subseteq Q_0 \cup N$ und $\mu(Q_0 \cup N) = \sum_{\nu \in J} \mu(Q_\nu) \leq \frac{\varepsilon}{\gamma}$. Wegen der Vollständigkeit des Inhalts μ ist also $F_\gamma \in \mathfrak{Q}$ und $\mu(F_\gamma) = q(F_\gamma) = 0$. Da für die Menge F aller Unstetigkeitsstellen von f die Gleichung $F = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_{1/n}$ gilt, ferner stets $F_{1/n} \subseteq F_{1/(n+1)}$ ist, so ist F eine q -Nullmenge, also f q -fast überall stetig. — Umgekehrt sei $f|E$ beschränkt, q -fast überall stetig und im Komplement einer kompakten Menge K gleich Null. Nach dem Korollar zu Satz 7 kann ohne Beschränkung der Allgemeinheit K als I -quadrierbar vorausgesetzt werden. Für ein $\varepsilon > 0$ sei F_ε wie oben als Urbildmenge $[w \geq \varepsilon]$ definiert. Da w oberhalb stetig ist, so ist F_ε abgeschlossen und wegen $F_\varepsilon \subseteq K$ sogar kompakt. Somit ist $q(F_\varepsilon) = 0$ und damit auch die Begrenzung von F_ε eine q -Nullmenge,

¹⁹⁾ In Übereinstimmung mit dem in ¹⁷⁾ Gesagten ist hierbei „ q -fast überall stetig“ im Sinne der BOURBAKISCHEN Theorie zu verstehen und heißt: es gilt $q^*(F) = \int f^* \chi_F d\mu = 0$ für die Menge F aller Unstetigkeitsstellen der betreffenden Funktion f . Der folgende Beweis zeigt, daß F dann sowohl im Sinne von BOURBAKI als auch von STONE q -integrierbar und $q(F) = 0$ ist.

da f Q -fast überall stetig ist; nach dem bereits bewiesenen ersten Teil der Behauptung ist dann F_ε sogar I -quadrierbar und nach Satz 8 $\mu(F_\varepsilon) - Q(F_\varepsilon) = 0$. Folglich existiert eine offene Menge $U_0 \in \mathfrak{Q}$ mit $\mu(U_0) \leq \varepsilon$ und $F_\varepsilon \subseteq U_0$. Für jeden Punkt $x \in K - F_\varepsilon$ ist $w(x) < \varepsilon$; daher existiert eine Umgebung $U_x \in \mathfrak{Q}$ von x , in welcher f um höchstens ε schwankt. Wegen der Kompaktheit von K gibt es endlich viele Punkte $x_1, \dots, x_n \in K - F_\varepsilon$ derart, daß K von den I -quadrierbaren, offenen Mengen $U_0, U_1 = U_{x_1}, \dots, U_n = U_{x_n}$ überdeckt wird.

Setzen wir $Q_0 = U_0 \cap K$, $Q_1 = U_1 \cap K - Q_0$ und allgemein $Q_v = U_v \cap K - \bigcup_{\varrho=0}^{v-1} Q_\varrho$, so sind die Mengen $Q_0, \dots, Q_n$ paarweise fremd und I -quadrierbar, ferner ist $K = \bigcup_{v=0}^n Q_v$. Bezeichnet α_v das Infimum und β_v das Supremum von f auf Q_v , $v = 0, 1, \dots, n$, so gilt $\sum_{v=0}^n \alpha_v \chi_{Q_v} \leq f \leq \sum_{v=0}^n \beta_v \chi_{Q_v}$ und $\sum_{v=0}^n (\beta_v - \alpha_v) \mu(Q_v) \leq 2M\varepsilon + \varepsilon \sum_{v=1}^n \mu(Q_v) \leq \varepsilon(2M + \mu(K))$; hierbei bedeutet M eine obere Schranke für den Betrag von f auf E . Also ist f Riemann-integrierbar bezüglich I .

3.5. Bislang blieb eine Folgerung aus der Adaption des Inhalts $\mu|_{\mathfrak{Q}}$ an E unberücksichtigt. Nach HAUPT-PAUC [11] gilt nämlich: *Ein an E adaptierter Inhalt ist stets σ -additiv.* Es ist also

$$(24) \quad \mu_c = \mu \quad \text{und} \quad \mu_p = 0$$

der σ -additive bzw. rein-endlich-additive Teil von μ . Vermöge der in 2.3 aufgezeigten Koppelung der Zerlegung $\mu = \mu_c + \mu_p$ mit der Zerlegung $I = I_c + I_p$ von I in seinen stetigen Teil I_c und rein-unstetigen Teil I_p lassen sich nunmehr über die Zerlegungsteile I_c und I_p genauere Aussagen machen. Wir benützen hierzu die in § 2 eingeführten Bezeichnungen.

Satz 10. *I. Jede Funktion $f \in \mathfrak{R}$ ist Q -integrierbar und uneigentlich Riemann-integrierbar; es gilt*

$$(25) \quad I_c(f) = \int f dQ = \int^{(u)} f d\mu.$$

II. *Es ist $\mathfrak{Q}_c = \mathfrak{Q}$ und $\mathfrak{S}_c = \mathfrak{S}$.*

III. *Es ist $\mathfrak{Q}_p$ das System aller relativ kompakten Teilmengen von E und $\mathfrak{S}_p$ das System aller beschränkten Funktionen $f|_E$ mit kompaktem Träger.*

Beweis. Zu I. Da $\mu_c = \mu$ ist, folgt aus Satz 5, Beh. I die Gültigkeit der Gleichung $I_c(f) = \int^{(u)} f d\mu$ für alle $f \in \mathfrak{R}$. Zu zeigen ist also noch, daß jede Funktion $f \in \mathfrak{R}$ Q -integrierbar und $\int f dQ = \int^{(u)} f d\mu$ ist; hierzu kann ohne Beschränkung der Allgemeinheit $f \geq 0$ vorausgesetzt werden. Nach dem Lemma 4 (angewandt auf $\mathfrak{R}(E)$ an Stelle von $\mathfrak{R}$) existiert eine nicht fallende Folge $\{g_n\}$ nicht negativer Funktionen aus $\mathfrak{R}(E)$ mit $\sup g_n = f$. Wegen $\int g_n dQ = \int g_n d\mu \leq \int^{(u)} f d\mu < +\infty$, $n = 1, 2, \dots$, ist also f Q -integrierbar und $\int f dQ = \sup \int g_n dQ \leq \int^{(u)} f d\mu$. Für eine beliebige Funktion $g \in \mathfrak{S}$ mit $g \leq f$ ist nach

(23) $\int g d\mu = \int g d\varrho \leq \int f d\varrho$ und folglich $\int f d\mu \stackrel{(u)}{\leq} \int f d\varrho$. Also ist $\int f d\varrho = \int f d\mu$. — Zu II. Die Behauptung folgt aus I. und Satz 6, Beh. I. — Zu III. Da jede I -quadrierbare Menge relativ kompakt und jede kompakte Menge in einer I -quadrierbaren enthalten ist, folgt die Behauptung aus I. und Satz 6, Beh. II.

Der Satz 10 zeigt, daß es zu jedem stetigen, positiven, linearen Funktional $I|\mathfrak{R}$ ein eindeutig bestimmtes, positives Radonsches Maß ϱ auf E gibt, in bezug auf welches $I(f) = \int f d\varrho$ für alle Funktionen $f \in \mathfrak{R}$ gilt. Eine erste Kennzeichnung der rein-unstetigen Funktionale auf $\mathfrak{R}$ enthält das folgende

Korollar. Gleichwertig sind folgende drei Aussagen:

I. Das Funktional $I|\mathfrak{R}$ ist rein-unstetig.

II. Es ist $I(f) = 0$ für jede Funktion $f \in \mathfrak{R}$ mit kompaktem Träger.

III. Der Inhalt $\mu|\mathfrak{Q}$ ist identisch Null.

Beweis. Aus I. folgt II. Eine Funktion $f \in \mathfrak{R}$ mit kompaktem Träger ist nach Satz 8 Riemann-integrierbar; folglich gilt $\int f d\mu = \int f d\varrho = I(f)$. Nach Satz 10 gilt aber auch $\int f d\varrho = I_c(f)$. Wegen $I_c = 0$ ist also $I(f) = 0$. — Aus II. folgt III. Für jede Menge $Q \in \mathfrak{Q}$ ist nach (5) und (6) $\mu(Q) = \sup(I(g); 0 \leq g \leq \chi_Q, g \in \mathfrak{R})$. Da Q relativ kompakt ist, besitzt jede Funktion $g \in \mathfrak{R}$ mit $0 \leq g \leq \chi_Q$ einen kompakten Träger und es ist somit $I(g) = 0$. Hieraus folgt $\mu(Q) = 0$. — Aus III. folgt I., da nach der Behauptung I des Satzes 10 $I_c = 0$ ist.

Dieses Korollar gestattet nunmehr die Herleitung einer einfachen Formel für die Berechnung von I_p und damit auch von I_c .

Satz 11. Für jede Funktion $f \geq 0$ aus $\mathfrak{R}$ ist

$$(26) \quad I_p(f) = \lim_{\alpha \rightarrow +0} I(\min(\alpha, f)).$$

Das Funktional I ist dann und nur dann stetig bzw. rein-unstetig, wenn

$$(27) \quad \lim_{\alpha \rightarrow +0} I(\min(\alpha, f)) = 0$$

bzw.

$$(28) \quad I(\min(1, f)) = I(f)$$

ist für alle $f \geq 0$ aus $\mathfrak{R}$.

Beweis. Es sei f eine nicht negative Funktion aus $\mathfrak{R}$. Da f im Unendlichen verschwindet, ist die Funktion $g_\alpha = \min(\alpha, f) - f$ für jede reelle Zahl $\alpha > 0$ ein Element von $\mathfrak{R} \cap \mathfrak{R}(E)$. Nach dem Korollar zu Satz 10 gilt also $I_p(g_\alpha) = 0$ und somit die Gleichung $I(\min(\alpha, f)) = I_c(\min(\alpha, f)) + I_p(f)$ für jedes $\alpha > 0$. Läßt man in dieser Gleichung α gegen $+0$ konvergieren, so folgt (26); wegen der Stetigkeit von I_c ist nämlich $\lim_{\alpha \rightarrow +0} I_c(\min(\alpha, f)) = \lim_{n \rightarrow \infty} I_c\left(\min\left(\frac{1}{n}, f\right)\right) = I_c(0) = 0$. — Aus (26) folgt unmittelbar die Kennzeichnung der stetigen Funktionale durch Gl. (27). — Ist I rein-unstetig, so gilt nach dem Bisherigen $I(g_1) = 0$, also (28). Aus (28) folgt umgekehrt die Gleichung $I(\min(\alpha, f)) = I(f)$ für jedes $\alpha > 0$ und hieraus $I = I_p$ nach (26).

Wir erhalten als Korollar folgende Aussage über die Möglichkeit einer Integraldarstellung von $I(f)$.

Korollar. *Es sei f eine nicht negative Funktion aus $\mathfrak{R}$. Dann ist die Bedingung (27) notwendig und hinreichend für das Bestehen der Gleichung*

$$I(f) = \int f d\varrho = \int f d\mu. \quad (u)$$

Setzen wir $G = [f > 0]$, so ist für das Bestehen dieser Gleichungen dagegen nur hinreichend die Bedingung

$$\sup(I(g); 0 \leq g \leq \chi_G, g \in \mathfrak{R}) < +\infty^{20}.$$

Beweis. Daß die Bedingung (27) notwendig und hinreichend ist, folgt aus (25) und (26) sowie aus $I = I_c + I_p$. — Es sei $\gamma(G) = \sup(I(g); 0 \leq g \leq \chi_G, g \in \mathfrak{R})$. Wegen $0 \leq \frac{1}{\alpha} \min(\alpha, f) \leq \chi_G$ ist dann $0 \leq I(\min(\alpha, f)) \leq \alpha \gamma(G)$ für jedes $\alpha > 0$. Hieraus folgt die Bedingung (27).

3.6. Beispiele rein-unstetiger, positiver, linearer Funktionale.

1. Der lokal kompakte Raum E sei das halboffene Einheitsintervall $(0, 1] = \{x: 0 < x \leq 1\}$ der Zahlengeraden, versehen mit der üblichen Topologie. $\mathfrak{R}$ bestehe aus allen stetigen Funktionen $f|_{(0, 1]}$, aufgefaßt als nur auf E definiert, mit $f(0) = 0$ und in $x = 0$ existierender rechtsseitiger Ableitung $f'(0)$. Für jedes $f \in \mathfrak{R}$ sei $I(f) = f'(0)^{21}$.

2. E sei die Halbgerade $[0, +\infty) = \{x: 0 \leq x < +\infty\}$ mit der üblichen Topologie. $\mathfrak{R}$ bestehe aus allen stetigen Funktionen $f|_{[0, +\infty)}$, für welche $\lim_{x \rightarrow +\infty} x f(x)$ (eigentlich) existiert. Für jedes $f \in \mathfrak{R}$ sei $I(f) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x f(x)$.

Bemerkung. Im Beispiel 2 ist $I(f) = 0 = \int f d\varrho = \int f d\mu$ für die spezielle, nicht negative Funktion $f(x) = (1 - x^2)^{-1}$ ($x \in E$) aus $\mathfrak{R}$; ferner ist $G = [f > 0]$ der Gesamttraum E . Bezeichnet q die Funktion $(1 + x)^{-1}$ aus $\mathfrak{R}$, so ist für jede reelle Zahl $\alpha > 0$ die Funktion $g_\alpha = \min(1, \alpha q)$ ein Element von $\mathfrak{R}$ und $0 \leq g_\alpha \leq 1$. Wegen $I(g_\alpha) = \alpha$ ist folglich $\sup(I(g); 0 \leq g \leq \chi_G, g \in \mathfrak{R}) = +\infty$. Die im Korollar zu Satz 11 genannte hinreichende Bedingung ist also nicht notwendig.

§ 4. Zurückführung des abstrakten Falles auf den konkreten

4.1. Im letzten Paragraphen ergab sich unter anderem, daß unter den dort gemachten speziellen Annahmen über E und $\mathfrak{R}$ zu jedem positiven, linearen Funktional $I|_{\mathfrak{R}}$ ein Radonsches Maß ϱ auf E derart existiert, daß die Theorie des Riemann-Integrals bezüglich I mit der bezüglich ϱ identisch ist. Es bedeutet also keine Einschränkung der Allgemeinheit, im konkreten Fall eines lokal kompakten Raumes den Standpunkt von Haupt und Pauc einzunehmen. In den folgenden Betrachtungen wird dieses Ergebnis dahingehend verschärft, daß die Loomissche Theorie des Riemann-Integrals selbst

²⁰⁾ Vgl. auch Satz 16.

²¹⁾ Nach Loomis [14], S. 174, wo das Beispiel aber nicht in unserem Sinne interpretiert wird.

im abstrakten Fall keinen wesentlichen Gewinn an Allgemeinheit gegenüber dem konkreten Fall bringt. Wir behaupten nämlich: Ist E eine Menge und $\mathfrak{N}$ ein System von beschränkten Funktionen $g|E$ mit den Eigenschaften (1) bis (3) sowie (21) und (22), so existiert ein lokal kompakter Raum $E'_\mathfrak{N}$, der E als dichte Teilmenge enthält, mit folgender Eigenschaft: Zu jedem positiven, linearen Funktional $I| \mathfrak{N}$ gibt es ein positives Radonsches Maß ϱ' auf $E'_\mathfrak{N}$ derart, daß eine Funktion $f|E$ dann und nur dann Riemann-integrierbar bezüglich I ist, wenn sie zu einer bezüglich ϱ' Riemann-integrierbaren Funktion $f'|E'_\mathfrak{N}$ fortgesetzt werden kann; für jede solche Fortsetzung f' von f ist $\int f d\mu = \int f' d\varrho'$.

4.2. Es liege der abstrakte Fall des §1 vor: E sei eine Menge, $\mathfrak{N}$ ein System auf E definierter, reeller Funktionen mit den Eigenschaften (1) bis (3) und $I|\mathfrak{N}$ ein positives, lineares Funktional. Wir behaupten zunächst, daß es im Hinblick auf die Loomissche Theorie des Riemann-Integrals keine wesentliche Einschränkung bedeutet, über $\mathfrak{N}$ folgende drei Zusatz-Voraussetzungen zu machen: 1. *Jede Funktion aus $\mathfrak{N}$ ist beschränkt*; 2. *es besitzt $\mathfrak{N}$ die Eigenschaft (21)*; 3. *es besitzt $\mathfrak{N}$ die Eigenschaft (22)*.

Zu 1. Die Teilmenge $\mathfrak{N}^*$ von $\mathfrak{N}$ aller beschränkten Funktionen aus $\mathfrak{N}$ genügt den Bedingungen (1) bis (3). Bezeichnet $I^*|\mathfrak{N}^*$ die Verengung von I auf $\mathfrak{N}^*$, so führen die Funktionale $I| \mathfrak{N}$ und $I^*|\mathfrak{N}^*$ zum gleichen System $\mathfrak{Q}$ quadrierbarer Mengen, zum gleichen Inhalt $\mu|\mathfrak{Q}$, zum gleichen System $\mathfrak{S}$ Riemann-integrierbarer Funktionen und zum gleichen Riemann-Integral über $\mathfrak{S}$. Zum Beweis sei Q eine I -quadrierbare Menge und $\varepsilon > 0$ eine reelle Zahl. Dann existieren Funktionen $g, h \in \mathfrak{N}$ mit $0 \leq g \leq \chi_Q \leq h$ und $I(h-g) \leq \varepsilon$. Setzen wir $h^* = \min(1, h)$, so sind g und h^* Funktionen aus $\mathfrak{N}^*$ mit $0 \leq g \leq \chi_Q \leq h^* \leq h$ und $I^*(h^*-g) \leq I(h-g) \leq \varepsilon$. Also ist Q auch I^* -quadrierbar. Trivial ist, daß umgekehrt eine I^* -quadrierbare Menge auch I -quadrierbar ist. Da in die Definition des Inhalts $\mu|\mathfrak{Q}$ nur Funktionen aus $\mathfrak{N}^*$ eingehen, führen I und I^* zum gleichen Inhalt μ . Hieraus folgt aber der Rest der Behauptung.

Zu 2. Es bezeichne E_0 die Menge aller Elemente $x \in E$ mit $g(x) = 0$ für alle $g \in \mathfrak{N}$. Aus der Definition der Vervollständigung $\overline{\mathfrak{N}}$ von $\mathfrak{N}$ bezüglich I folgt, daß jede Funktion $f \in \mathfrak{N}$ auf E_0 gleich Null ist. Hieraus folgt insbesondere, daß jede quadrierbare Menge Q zu E_0 fremd und jede Riemann-integrierbare Funktion auf E_0 gleich Null ist. Es genügt daher, die Funktionen $g \in \mathfrak{N}$ nur auf dem verengerten Definitionsbereich $E - E_0$ zu betrachten. (Den Trivialfall, in welchem $E - E_0$ die leere Menge ist, also $\mathfrak{N}$ nur aus der konstanten Funktion $g=0$ besteht, können wir unberücksichtigt lassen.)

Zu 3. Es bezeichne R die folgende Äquivalenzrelation in E : Zwei Elemente $x, y \in E$ heißen äquivalent, wenn $g(x) = g(y)$ ist für jede Funktion $g \in \mathfrak{N}$. Es sei $E^* = E/R$ die Menge der Äquivalenzklassen bezüglich R ; ohne Beschränkung der Allgemeinheit können wir E^* als eine Teilmenge von E annehmen, die aus jeder Äquivalenzklasse genau einen Punkt als Repräsentanten enthält. Das System $\mathfrak{N}^*$ der auf E^* verengten Funktionen aus $\mathfrak{N}$

besitzt neben den Eigenschaften (1) bis (3) auch die Eigenschaft (22) auf E^* . Wir übertragen das Funktional I auf $\mathfrak{N}^*$ und erhalten ein positives, lineares Funktional $I^*|\mathfrak{N}^*$. Dann gilt: Eine Funktion $f^*|E^*$ liegt dann und nur dann in der Vervollständigung von $\mathfrak{N}^*$ bezüglich I^* , wenn sie zu einer in der Vervollständigung $\mathfrak{N}$ von $\mathfrak{N}$ bezüglich I gelegenen Funktion $f|E$ fortgesetzt werden kann. Die Fortsetzung $f \in \mathfrak{N}$ von f^* kann so gewählt werden, daß f auf jeder Äquivalenzklasse bezüglich R konstant ist. Hieraus folgt, daß eine Menge $Q^* \subseteq E^*$ dann und nur dann I^* -quadrierbar ist, wenn eine I -quadrierbare Menge $Q \subseteq E$ mit $Q^* = Q \cap E$ existiert; bezeichnet μ^* den sich aus I^* ableitenden Inhalt, so ist $\mu^*(Q^*) = \mu(Q)$. Es folgt weiter, daß eine Funktion $f^*|E^*$ dann und nur dann Riemann-integrierbar bezüglich I^* ist, wenn sie zu einer bezüglich I Riemann-integrierbaren Funktion $f|E$ fortgesetzt werden kann; es gilt dann $\int f^* d\mu^* = \int f d\mu$.

4.3. Von nun an genüge $\mathfrak{N}$ neben (1) bis (3) auch noch den in 4.2 genannten drei Zusatz-Voraussetzungen. Dann behaupten wir:

Satz 12. *Zu E und $\mathfrak{N}$ existiert ein lokal kompakter Raum $E'_{\mathfrak{N}}$ mit folgenden Eigenschaften:*

- (29) *E ist eine dichte Teilmenge von $E'_{\mathfrak{N}}$;*
- (30) *jede Funktion $g \in \mathfrak{N}$ kann (auf genau eine Weise) zu einer auf $E'_{\mathfrak{N}}$ stetigen, im Unendlichen verschwindenden Funktion g' fortgesetzt werden;*
- (31) *die Menge $\mathfrak{N}'$ der stetigen Fortsetzungen g' aller Funktionen $g \in \mathfrak{N}$ besitzt auf $E'_{\mathfrak{N}}$ die Trennungseigenschaften (21) und (22)²²).*

Beweis. Nach dem Lemma 1 ist die Menge $\mathfrak{A}_0$ aller (beschränkten) Funktionen auf E , die durch Funktionen aus $\mathfrak{N}$ gleichmäßig approximiert werden können, eine hinsichtlich gleichmäßiger Konvergenz abgeschlossene Algebra. Die kleinste, $\mathfrak{A}_0$ umfassende Algebra $\mathfrak{A}$, welche auch die auf E konstanten Funktionen enthält, besteht dann genau aus den Funktionen $f = \alpha + f_0$, wobei α eine reelle Zahl und $f_0 \in \mathfrak{A}_0$ ist. Wir behaupten, daß auch $\mathfrak{A}$ hinsichtlich gleichmäßiger Konvergenz abgeschlossen ist. Wenn $\mathfrak{A} = \mathfrak{A}_0$ ist, also $\mathfrak{A}_0$ die auf E konstanten Funktionen enthält, ist dies trivial. Wir können daher annehmen, daß $f = 0$ die einzige konstante Funktion in $\mathfrak{A}_0$ ist. Es sei $\{f_n\}$ eine gegen eine Funktion $f|E$ gleichmäßig konvergente Folge von Funktionen aus $\mathfrak{A}$; jedes f_n kann in der Form $f_n = \alpha_n + f_n^0$ mit $\alpha_n \in \mathbb{P}$ und $f_n^0 \in \mathfrak{A}_0$ dargestellt werden. Ist α ein Limeswert der Folge $\{\alpha_n\}$, so existiert eine gegen α konvergente Teilfolge $\{\alpha_{n_i}\}$; folglich konvergiert $\{f_{n_i}^0\}$ gleichmäßig gegen $f - \alpha$, d.h. es ist $f - \alpha \in \mathfrak{A}_0$. Für einen zweiten Limeswert β von $\{\alpha_n\}$ folgt entsprechend $f - \beta \in \mathfrak{A}_0$. Also sind α, β endlich und die konstante Funktion $\alpha - \beta = (f - \beta) - (f - \alpha)$ liegt in $\mathfrak{A}_0$; gemäß unserer Annahme über $\mathfrak{A}_0$ ist also $\alpha = \beta$, d.h. es existiert der Grenzwert der Folge $\{\alpha_n\}$ und zwar ist $\alpha = \beta = \lim \alpha_n$. Dann konvergiert aber auch die Folge $\{f_n^0\}$ gleichmäßig auf E gegen eine Grenzfunktion $f_0 \in \mathfrak{A}_0$ und es ist $f - \alpha + f_0 \in \mathfrak{A}$. Auf Grund der festgestellten

²²) In (21) und (22) sind also E und $\mathfrak{N}$ sinngemäß durch $E'_{\mathfrak{N}}$ und $\mathfrak{N}'$ zu ersetzen.

Eigenschaften von $\mathfrak{A}$ existiert nach GELFAND und ŠILOV [9]²³⁾ ein kompakter Raum E'' , welcher E als dichte Teilmenge enthält und auf welchen die Funktionen aus $\mathfrak{A}$ und nur diese stetig fortgesetzt werden können. Es bezeichne $\mathfrak{A}''$ bzw. $\mathfrak{A}_0''$ bzw. $\mathfrak{A}'$ die Menge der auf E'' stetig fortgesetzten Funktionen aus $\mathfrak{A}$ bzw. $\mathfrak{A}_0$ bzw. $\mathfrak{A}$; dann ist $\mathfrak{A}'$ die Menge aller stetigen Funktionen auf E'' . Nun sind zwei Fälle zu unterscheiden. Erstens. Es sei $\mathfrak{A} = \mathfrak{A}_0$, d. h. es enthalte $\mathfrak{A}_0$ die auf E konstanten Funktionen. Dann ist E'' selbst ein Raum $E'_{\mathfrak{A}}$. Die Trennungseigenschaften (21) und (22) sind auf E'' erfüllt, da jede auf E'' stetige, reelle Funktion durch Funktionen aus $\mathfrak{A}''$ zunächst auf E und wegen der Dichtigkeit von E in E'' dann auf ganz E'' gleichmäßig approximiert werden kann. Zweitens. Es sei $\mathfrak{A} \neq \mathfrak{A}_0$, d. h. $\mathfrak{A}_0$ enthalte $f=0$ als einzige auf E konstante Funktion. In diesem Falle ist $\mathfrak{A}_0''$ ein maximales Ideal in $\mathfrak{A}''$. Nach STONE [20]²⁴⁾ existiert folglich ein eindeutig bestimmter Punkt p_0'' in E'' derart, daß $\mathfrak{A}_0''$ die Menge aller stetigen Funktionen f'' auf E'' mit $f''(p_0'')=0$ ist. Der Unterraum $E' = E'' - (p_0'')$ von E'' ist dann ein Raum $E'_{\mathfrak{A}}$. Die Trennungseigenschaften (21) und (22) ergeben sich auf Grund der gleichen Bemerkung wie im bereits erledigten Falle. Damit ist der Satz 12 vollständig bewiesen²⁵⁾.

Bemerkung. Aus dem Beweis des Satzes 12 (und wegen Satz 13 natürlich auch aus den Eigenschaften (29) bis (31) von $E'_{\mathfrak{A}}$) folgt, daß $E'_{\mathfrak{A}}$ dann und nur dann kompakt ist, wenn die konstante Funktion $g=1$ durch Funktionen aus $\mathfrak{A}$ gleichmäßig approximiert werden kann, also wegen (3) in $\mathfrak{A}$ liegt.

Der Vollständigkeit halber beweisen wir

Satz 13. Der Raum $E'_{\mathfrak{A}}$ ist durch die Eigenschaften (29) bis (31) bis auf Homöomorphismen, welche E punktweise festlassen, eindeutig bestimmt.

Beweis. Es seien E'_1 und E'_2 zwei Räume $E'_{\mathfrak{A}}$. Wir setzen $E''_i = E'_i$, falls E'_i kompakt ist; andernfalls sei E''_i die durch Adjunktion des unendlich fernen Punktes w_i entstehende Alexandroffsche Kompaktifizierung von E'_i . In jedem Falle ist E''_i ein kompakter Raum, in dem E dicht liegt und auf den jede stetige, im Unendlichen verschwindende Funktion $f'|E'_i$ stetig fortgesetzt werden kann; insbesondere können die Funktionen aus $\mathfrak{A}$ auf E''_i stetig fortgesetzt werden. Aus den Eigenschaften von E'_i und aus Lemma 4 folgt dann, daß jede stetige Funktion $f''|E''_i$ eine Darstellung $f'' = \alpha + f_0''$ besitzt, wobei α eine reelle Zahl ist und f_0'' durch auf E''_i stetig fortgesetzte Funktionen aus $\mathfrak{A}$ gleichmäßig approximiert werden kann ($i=1, 2$). Daher kann jede beschränkte Funktion $f|E$, die zu einer auf E'_1 stetigen Funktion fortgesetzt werden kann, auch zu einer auf E'_2 stetigen Funktion fortgesetzt werden und umgekehrt. Nach STONE [20]²⁶⁾ folgt hieraus die Existenz einer Homöomorphie ψ von E''_1 auf E''_2 , welche E punktweise festläßt. Da E in E''_1 und E''_2 dicht liegt, gilt

²³⁾ Vgl. hierzu auch NÖBELING und BAUER [16], S. 34 und 35.

²⁴⁾ Vgl. hierzu S. 25 der in ²³⁾ zitierten Arbeit.

²⁵⁾ Einen anderen, nur einfache topologische Hilfsmittel verwendenden Beweis hat Verf. in [17], S. 65–67 gegeben.

²⁶⁾ Vgl. auch [16], S. 28.

dann $f''_1 - f''_2 \circ \psi$ für jede Funktion $f \in E$, die zu einer stetigen Funktion $f''_1|E'_1$ und zu einer stetigen Funktion $f''_2|E'_2$ fortgesetzt werden kann. Ist E'_1 nicht kompakt, so folgt hieraus $0 = f''_1(u_1) = f''_2(\psi(u_1))$ für jedes $f \in \mathfrak{N}$; wegen (31) ist also auch E'_2 nicht kompakt, vielmehr gilt $w_2 = \psi(u_1)$. Durch Vertauschung der Rollen von E'_1 und E'_2 folgt, daß umgekehrt mit E'_1 auch E'_2 kompakt ist. Damit ist gezeigt, daß ψ in jedem Falle E'_1 auf E'_2 homöomorph abbildet. Auch die auf E'_1 verengerte Homöomorphie ψ läßt E punktweise fest.

Der Satz 13 berechtigt uns, fernerhin von dem Raum $E'_\mathfrak{R}$ zu sprechen. Ist (wie in § 3) E selbst ein lokal kompakter Raum und $\mathfrak{N}$ ein System stetiger, im Unendlichen verschwindender Funktionen auf E mit den Eigenschaften (1) bis (3) sowie (21) und (22), so ist $E'_\mathfrak{R} = E$.

Die aus Nr. 1.5 bekannte Bedingung (8) für $\mathfrak{N}$ erfährt jetzt eine einfache und neue Deutung.

Satz 14. Die Funktionenmenge $\mathfrak{N}$ genügt (unter den bisherigen Annahmen) dann und nur dann der Bedingung (8), wenn die stetige Fortsetzung $g'|E'_\mathfrak{R}$ einer jeden Funktion $g \in \mathfrak{N}$ einen kompakten Träger besitzt.

Beweis. Es genüge $\mathfrak{N}$ der Bedingung (8). Dann existiert zu beliebigem $g \in \mathfrak{N}$ eine nicht negative Funktion $h \in \mathfrak{N}$ derart, daß für jedes $x \in E$ aus $h(x) < 1$ folgt $g(x) = 0$. Bezeichnet g' bzw. h' die stetige Fortsetzung von g bzw. h auf $E'_\mathfrak{R}$, so folgt, da E in $E'_\mathfrak{R}$ dicht liegt, sogar für jedes $x' \in E'_\mathfrak{R}$ aus $h'(x') < 1$ stets $g'(x') = 0$. Da $h' \geq 0$ ist und im Unendlichen verschwindet, ist $\{h' \geq 1\}$ eine kompakte Menge. g' ist im Komplement dieser Menge gleich Null und besitzt daher einen kompakten Träger. Umgekehrt sei der Träger $T(g')$ der stetigen Fortsetzung $g'|E'_\mathfrak{R}$ einer Funktion $g \in \mathfrak{N}$ kompakt. Dann gibt es eine nicht negative, stetige, im Unendlichen verschwindende Funktion $t'|E'_\mathfrak{R}$ mit $t'(x') = 1$ für alle $x' \in T(g')$. Wegen (31) und Lemma 4 existiert zu t' eine nicht negative Funktion $h' \in \mathfrak{N}$ derart, daß für deren stetige Fortsetzung $h'|E'_\mathfrak{R}$ gilt $0 \leq \frac{1}{2} h' \leq t' \leq \frac{1}{2} h' + \frac{1}{2}$. Diese Funktion h leistet bezüglich g das in (8) Verlangte: Aus $h(x) < 1$ für ein $x \in E$ folgt $t'(x) < 1$; also ist $x \notin T(g')$ und somit $g(x) = g'(x) = 0$. Die Bedingung (8) ist also erfüllt.

4.4. Der Raum $E'_\mathfrak{R}$ wurde unabhängig von dem auf $\mathfrak{N}$ definierten Funktional I definiert. Erst jetzt beziehen wir I in unsere Betrachtungen mit ein. Für eine beliebige Funktion $g \in \mathfrak{N}$ bezeichne im folgenden g' deren eindeutig bestimmte stetige Fortsetzung auf $E'_\mathfrak{R}$; $\mathfrak{N}'$ sei die Menge der Fortsetzungen g' aller Funktionen $g \in \mathfrak{N}$. Wir übertragen I auf $\mathfrak{N}'$ durch die Festsetzung

$$(32) \quad I'(g') = I(g) \quad (g \in \mathfrak{N}).$$

Dann ist auch I' auf $\mathfrak{N}'$ ein positives, lineares Funktional. Da E in $E'_\mathfrak{R}$ dicht liegt, genügt auch $\mathfrak{N}'$ den Bedingungen (1) bis (3) für $\mathfrak{N}$; nach Satz 12 besitzt daher $\mathfrak{N}'$ bezüglich $E'_\mathfrak{R}$ alle Eigenschaften, die in § 3 $\mathfrak{N}$ bezüglich E hatte. Also sind die Resultate des § 3 auf $E'_\mathfrak{R}$, $\mathfrak{N}'$ und I' an Stelle von E , $\mathfrak{N}$ und I anwendbar. Es bezeichne μ' auf $\mathfrak{N}'$ den sich aus I' ableitenden, an $E'_\mathfrak{R}$ adaptierten Inhalt und q' das eindeutig bestimmte positive Radonsche Maß auf $E'_\mathfrak{R}$, in

bezug auf welches alle Mengen $Q' \in \mathfrak{D}'$ q' -integrierbar mit $q'(Q') = \mu'(Q')$ sind. Dann ist $\mathfrak{D}'$ nach dem Korollar zu Satz 8 auch das System der q' -quadrierbaren Mengen. Nach dem gleichen Korollar ist die Menge $\mathfrak{S}'$ der bezüglich I' Riemann-integrierbaren Funktionen gleich der Menge der bezüglich q' Riemann-integrierbaren Funktionen. Es gilt nun der einleitend bereits angekündigte

Satz 15. I. Eine Menge $Q \subseteq E$ ist dann und nur dann I -quadrierbar, wenn eine q' -quadrierbare Menge $Q' \subseteq E'_{\mathfrak{R}}$ existiert mit $Q = Q' \cap E$. Für je zwei Mengen $Q \in \mathfrak{D}$ und $Q' \in \mathfrak{D}'$ mit $Q = Q' \cap E$ ist $\mu(Q) = \mu'(Q') = q'(Q')$.

II. Eine reelle Funktion $f|E$ ist dann und nur dann Riemann-integrierbar bezüglich I , wenn sie zu einer bezüglich q' Riemann-integrierbaren Funktion $f'|E'_{\mathfrak{R}}$ fortgesetzt werden kann. Für je zwei Funktionen $f \in \mathfrak{S}$ und $f' \in \mathfrak{S}'$, von denen die zweite eine Fortsetzung der ersten ist, gilt $\int f d\mu = \int f' d\mu' = \int f' d q'$.

Beweis. Zu I. Es sei $Q' \in \mathfrak{D}'$; wir behaupten die I -Quadrierbarkeit der Menge $Q = Q' \cap E$ und die Gültigkeit der Gleichung $\mu(Q) = \mu'(Q') (= q'(Q'))$. Zu beliebigem $\varepsilon > 0$ existieren Funktionen $g', h' \in \mathfrak{R}'$ mit $g' \leq \chi'_{Q'} \leq h'$ ²⁷⁾ und $I'(h' - g') \leq \varepsilon$. Für die zu $\mathfrak{R}$ gehörigen Verengerungen g und h von g' und h' auf E ist dann $g \leq \chi_Q \leq h$ und $I(h - g) \leq \varepsilon$. Also ist $Q \in \mathfrak{D}$; ferner gilt $\mu(Q) = \mu'(Q')$ nach (6) und (32). Umgekehrt sei $Q \subseteq E$ I -quadrierbar; zu zeigen ist die Existenz einer Menge $Q' \in \mathfrak{D}'$ mit $Q = Q' \cap E$. Für Funktionen $g, h \in \mathfrak{R}$ folgt aus $g \leq \chi_Q \leq h$ stets $g' \leq \chi'_{Q'} \leq h'$ für die stetigen Fortsetzungen g' und h' von g und h auf $E'_{\mathfrak{R}}$ und die abgeschlossene Hülle $\bar{Q}$ von Q in $E'_{\mathfrak{R}}$. Setzen wir $Q' = Q \cup (\bar{Q} - E)$, so gilt auch $g' \leq \chi'_{Q'} \leq h'$. Die Menge Q' leistet daher das Verlangte.

Zu II. Es sei f' eine Funktion aus $\mathfrak{S}'$ und f die Verengerung von f' auf E . Zu $\varepsilon > 0$ existieren dann Mengen $Q'_1, \dots, Q'_n \in \mathfrak{D}'$ und reelle Zahlen $\alpha_1, \beta_1, \dots, \alpha_n, \beta_n$ derart, daß $g' = \sum_{v=1}^n \alpha_v \chi'_{Q'_v} \leq f' \leq \sum_{v=1}^n \beta_v \chi'_{Q'_v} = h'$ und $\sum_{v=1}^n (\beta_v - \alpha_v) \mu'(Q'_v) \leq \varepsilon$ ist. Für die auf E definierten Funktionen $g = \sum \alpha_v \chi_{Q_v}$ und $h = \sum \beta_v \chi_{Q_v}$ mit $Q_v = Q'_v \cap E$, $v = 1, \dots, n$, gilt folglich $g \leq f \leq h$ sowie $\sum (\beta_v - \alpha_v) \mu(Q_v) \leq \varepsilon$. Also ist $f \in \mathfrak{S}$. Da $\mu(Q_v) = \mu'(Q'_v)$ ist folgt ferner noch $\int f d\mu = \int f' d\mu' (= \int f' d q')$. Umgekehrt sei f eine Funktion aus $\mathfrak{S}$; wir beweisen die Existenz einer in $\mathfrak{S}'$ gelegenen Fortsetzung f' von f auf $E'_{\mathfrak{R}}$. Da jede Funktion aus $\mathfrak{S}$ gleich der Differenz zweier nicht negativer Funktionen aus $\mathfrak{S}$ ist, können wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit $f \geq 0$ annehmen. Wie in 1.4 bezeichne $\mathfrak{E}$ die Menge aller $\mathfrak{D}$ -Treppenfunktionen; entsprechend sei $\mathfrak{E}'$ die Menge aller $\mathfrak{D}'$ -Treppenfunktionen (auf E'). Zu f existieren zwei Folgen $\{g_n\}_{n=1,2,\dots}$ und $\{h_n\}_{n=1,2,\dots}$ von Funktionen aus $\mathfrak{E}$ derart, daß $0 \leq g_1 \leq \dots \leq g_n \leq g_{n+1} \leq \dots$ $f \leq \dots \leq h_{n+1} \leq h_n \leq \dots \leq h_1$ und $\int (h_n - g_n) d\mu \leq 1/n$ für alle $n = 1, 2, \dots$ gilt. Es genügt zu zeigen, daß jede Funktion g_n bzw. h_n zu einer Funktion g'_n bzw. h'_n aus $\mathfrak{E}'$ fortgesetzt werden kann, und zwar so, daß $g'_n \leq g'_{n+1} \leq h'_{n+1} \leq h'_n$

²⁷⁾ Im folgenden bezeichnet χ_A die auf E definierte, charakteristische Funktion einer Menge $A \subseteq E$ und χ'_A die auf $E'_{\mathfrak{R}}$ definierte, charakteristische Funktion einer Menge $A' \subseteq E'_{\mathfrak{R}}$.

und $\int (h'_n - g'_n) d\mu' = \int (h_n - g_n) d\mu$ für jedes n ist. Dann folgt nämlich $\sup g'_n(x') \leq \inf h'_n(x')$ für jeden Punkt $x' \in E'_{\mathfrak{R}}$. Um also zu einer in $\mathfrak{E}'$ gelegenen Fortsetzung f' von f auf $E'_{\mathfrak{R}}$ zu gelangen, braucht man für einen beliebigen Punkt $x' \in E'_{\mathfrak{R}} - E$ als Funktionswert $f'(x')$ nur eine reelle Zahl ξ mit $\sup g'_n(x') \leq \xi \leq \inf h'_n(x')$ zu wählen. Die Existenz der Fortsetzungen g'_n und h'_n ergibt sich folgendermaßen. Jeder Menge $Q \in \mathfrak{Q}$ ordnen wir die Menge $Q' = Q \cup (\bar{Q} - E)$ zu, wobei wieder $\bar{Q}$ die abgeschlossene Hülle von Q in $E'_{\mathfrak{R}}$ bedeutet; nach dem Beweis der Behauptung I ist $Q' \in \mathfrak{Q}'$, $Q' \cap E = Q$ und $\mu'(Q') = \mu(Q)$. Ist g eine beliebige nicht negative Funktion aus $\mathfrak{G}$ und $g = \sum \lambda_r \chi_{Q_r}$ eine ihrer Darstellungen mit paarweise fremden Mengen $Q_1, \dots, Q_n \in \mathfrak{Q}$, so setzen wir sie zu einer nicht negativen Funktion $g'|E'_{\mathfrak{R}}$ wie folgt fort: Für einen Punkt $x' \in E'_{\mathfrak{R}} - E$ setzen wir $g'(x') = 0$, falls x' in keiner der Mengen $Q'_1, \dots, Q'_n$ liegt; liegt dagegen x' in $Q'_{r_1}, \dots, Q'_{r_r}, r_1 < \dots < r_r$, aber in keiner weiteren Menge Q'_v , so setzen wir $g'(x') = \max(\lambda_{r_1}, \dots, \lambda_{r_r})$. Für den Beweis der Unabhängigkeit der so definierten Fortsetzung g' von

der gewählten Darstellung von g seien $g = \sum_{\mu=1}^m \alpha_{\mu} \chi_{A_{\mu}}$ und $g = \sum_{\nu=1}^n \beta_{\nu} \chi_{B_{\nu}}$ zwei

Darstellungen von g mit paarweise fremden Mengen $A_1, \dots, A_m \in \mathfrak{Q}$ bzw. $B_1, \dots, B_n \in \mathfrak{Q}$; ferner sei x' ein Punkt von $E'_{\mathfrak{R}} - E$. Wir beweisen zuerst folgende einfache Bemerkung. Liegt x' in B'_v , ist $\beta_v \neq 0$ und sind $A_{\mu_1}, \dots, A_{\mu_r}$ genau die zu B_v nicht fremden Mengen unter den $A_1, \dots, A_m$, so liegt x' in einer der Mengen $A'_{\mu_1}, \dots, A'_{\mu_r}$ und es ist $\beta_v = \alpha_{\mu_1} = \dots = \alpha_{\mu_r}$. Wegen $x' \in B'_v$ ist nämlich $B_v \neq \emptyset$ und wegen $\beta_v \neq 0$ existiert folglich wenigstens ein A_{μ} mit $A_{\mu} \cap B_v \neq \emptyset$; da g auf A_{μ} und B_v konstant ist, so ist also $\alpha_{\mu} = \beta_v$ für jedes μ mit $A_{\mu} \cap B_v \neq \emptyset$. Um die Gleichheit der Funktionswerte $g'(x')$ nachzuweisen, die man ausgehend von der einen bzw. anderen Darstellung von g erhält, genügt es, die beiden folgenden Fälle zu betrachten. 1. Fall. Es liegt x' in keiner der Mengen $A'_1, \dots, A'_m$. 2. Fall. Es liegt x' in den Mengen $A'_{\mu_1}, \dots, A'_{\mu_k}$ und $B'_{r_1}, \dots, B'_{r_l}$, aber in keiner weiteren Menge unter den $A'_1, \dots, A'_m$ bzw. $B'_1, \dots, B'_n$. Im ersten Falle folgt aus der vorangestellten Bemerkung, daß x' höchstens in Mengen B'_v mit $\beta_v = 0$ liegt. Im zweiten Falle folgt aus der gleichen Bemerkung, daß jedes von Null verschiedene $\alpha_{\mu_1}, \dots, \alpha_{\mu_k}$ unter den $\beta_{r_1}, \dots, \beta_{r_l}$ und umgekehrt jedes von Null verschiedene $\beta_{r_1}, \dots, \beta_{r_l}$ unter den $\alpha_{\mu_1}, \dots, \alpha_{\mu_k}$ auftritt. Da g und damit alle Koeffizienten $\alpha_{\mu}, \beta_{\nu}$, die zu nicht leeren Mengen Q_{μ}, Q_{ν} gehören, nicht negativ sind, führen also in beiden Fällen beide Darstellungen von g zum gleichen Funktionswert $g'(x')$. Weiter behaupten wir, daß g' eine Funktion aus $\mathfrak{G}'$ ist. Hierzu sei $g = \sum_{v=1}^n \lambda_v \chi_{Q_v}$ eine Darstellung von g ; die Mengen $Q_v \in \mathfrak{Q}$ seien wieder paarweise fremd und es sei

$0 < \lambda_1 < \dots < \lambda_n$. Wir setzen $Q' = \bigcup_{v=1}^n Q'_v$ und $\tilde{Q}'_v = Q' - Q'_v, v = 1, \dots, n$; dann sind Q' und $\tilde{Q}'_v$ Mengen aus $\mathfrak{Q}'$. Die Urbildmenge $\{x' \mid g'(x') = \lambda_v\}$ ist definitionsgemäß für jedes $v = 1, \dots, n$ gleich $Q'_v \cap \tilde{Q}'_{v+1} \cap \dots \cap \tilde{Q}'_n$, also ein Element von $\mathfrak{Q}'$. Da g' nur die Werte $0, \lambda_1, \dots, \lambda_n$ annehmen kann, ist $g' = \sum_{v=1}^n \lambda_v \chi'_{\tilde{Q}'_v}$

und somit $g' \in \mathfrak{E}'$. Wegen $U'_v \cap E = Q_v$ gilt nach Behauptung I ferner $\mu'(U'_v) = \mu(Q_v)$ für jedes v und somit $\int g' d\mu' = \int g d\mu$. Schließlich zeigen wir, daß aus $0 \leq g \leq h$, $g, h \in \mathfrak{E}$, stets $g' \leq h'$ folgt. Hierzu wählen wir in $\mathfrak{Q}$ paarweise fremde Mengen $Q_1, \dots, Q_n$, so daß $g = \sum_{v=1}^n \alpha_v \chi_{Q_v}$ und $h = \sum_{v=1}^n \beta_v \chi_{Q_v}$ ist. Dann gilt $\alpha_v \leq \beta_v$ für jedes v mit $Q_v \neq \emptyset$ und aus der Definition von g' und h' folgt sofort $g' \leq h'$. Wendet man das beschriebene Verfahren der Fortsetzung nicht negativer Funktionen aus $\mathfrak{E}$ zu nicht negativen Funktionen aus $\mathfrak{E}'$ auf die Funktionen g_n und h_n an, so erhält man Fortsetzungen $g'_n, h'_n \in \mathfrak{E}'$ mit den gewünschten Eigenschaften. Also ist nunmehr auch die Behauptung II vollständig bewiesen.

Korollar. Für jede Funktion $f \in \mathfrak{R}$ ist $\int f d\mu \stackrel{(u)}{=} \int f' d\mu' = \int f' d\varrho'$.

Beweis. Nach Satz 10 ist $\int f' d\mu' \stackrel{(u)}{=} \int f' d\varrho'$. Es genügt also die Gleichung $\int f d\mu \stackrel{(u)}{=} \int f' d\mu'$ und diese wiederum nur für nicht negative Funktionen $f \in \mathfrak{R}$ zu beweisen. Für ein $f \geq 0$ aus $\mathfrak{R}$ sei g eine Funktion aus $\mathfrak{E}$ mit $0 \leq g \leq f$. Ist $g' \in \mathfrak{E}'$ eine Fortsetzung von g auf $E'_\mathfrak{R}$, so ist deren Positivteil $g'^+ \in \mathfrak{E}'$ und eine nicht negative Fortsetzung von g auf $E'_\mathfrak{R}$; nach (11) ist dann $g'^* = \min(g'^+, f')$ ein Element von $\mathfrak{E}'$ sowie eine Fortsetzung von g auf $E'_\mathfrak{R}$ mit $0 \leq g'^* \leq f'$. Nach Satz 15 ist daher die Menge der auf E verengerten Funktionen $g' \in \mathfrak{E}'$ mit $0 \leq g' \leq f'$ identisch mit der Menge aller Funktionen $g \in \mathfrak{E}$ mit $0 \leq g \leq f$. Aus der Definition des uneigentlichen Riemann-Integrals und Satz 15 folgt daher $\int f d\mu \stackrel{(u)}{=} \int f' d\mu'$.

4.5. Das in § 3 bewiesene Korollar zu Satz 11 über die Darstellbarkeit von $I(f)$ durch ein Integral läßt sich jetzt wie folgt verallgemeinern.

Satz 16. Für eine nicht negative Funktion $f \in \mathfrak{R}$ bestehen die Gleichungen

$$(33) \quad I(f) = \int f d\mu \stackrel{(u)}{=} \int f' d\mu' = \int f' d\varrho'$$

dann und nur dann, wenn

$$(34) \quad \lim_{\alpha \rightarrow +0} I(\min(\alpha, f)) = 0$$

ist. Die Bedingung (34) ist insbesondere dann erfüllt, wenn für die Menge G aller Elemente $x \in E$ mit $f(x) > 0$

$$(35) \quad \sup(I(g); 0 \leq g \leq \chi_G, g \in \mathfrak{R}) < +\infty$$

ist²⁸⁾.

Beweis. Da $\min(\alpha, f)$ die Funktion $\min(\alpha, f)$ auf $E'_\mathfrak{R}$ stetig fortsetzt, folgt die Gleichwertigkeit von (33) und (34) aus den Korollaren zu den

²⁸⁾ Ist f eine beliebige Funktion aus $\mathfrak{R}$, so ist die gleiche Bedingung (35) hinreichend für die Gültigkeit der Gln. (33), wenn hierbei G als Menge aller $x \in E$ mit $|f(x)| > 0$ definiert wird.

Sätzen 11 und 15. Daß aus (35) die Gl. (34) folgt, wurde bereits im Beweis des Korollars zu Satz 11 gezeigt.

Bemerkungen. 1. Durch Satz 16 haben wir auf anderem Wege ein Resultat von LOMIS [14], S. 176 gewonnen. Danach ist im abstrakten Fall des § 1 für eine beschränkte, nicht negative Funktion $f \in \mathfrak{K}$ die Bedingung (34) notwendig und hinreichend für das Bestehen der Gleichung $I(f) = \int f d\mu^{(u)}$.

2. Aus dem Beweis des Satzes 16 und des Korollars zu Satz 11 kann folgende Deutung der Bedingung (34) entnommen werden. Sie ist gleichbedeutend damit, daß der rein-unstetige Teil des Funktional $I|_{\mathfrak{K}}$ für die stetige Fortsetzung f' von f auf $E'_{\mathfrak{K}}$ gleich Null ist.

3. Die Bedingung (35) tritt in ähnlichem Zusammenhang auch bei HEWITT [13], S. 275 auf. Dort wird wie bei uns von einem positiven, linearen Funktional I über einem (dort mit $\mathfrak{F}$ bezeichneten) System $\mathfrak{K}$ von auf einer Menge E definierten, reellen Funktionen ausgegangen; von $\mathfrak{K}$ werden die Eigenschaften (1) bis (3) gefordert. Es wird das Ziel verfolgt, eine Darstellung von $I(f)$ durch ein Unterteilungsintegral zu finden, dem eine nach dem Vorbild der Theorie Radonscher Maße konstruierte, additive Mengenfunktion γ^* zugrunde liegt. In Theorem 2.27 wird die Gültigkeit der Gleichung $I(f) = \int f d\gamma^*$ für jede beschränkte Funktion $f \in \mathfrak{K}$ behauptet, welche der Bedingung (35) mit $G = \{f > 0\}$ genügt. Nach einer brieflichen Mitteilung von Herrn Hewitt ist sein Darstellungssatz (jedenfalls in dieser Allgemeinheit) falsch. Unser Satz 16 zeigt, daß das Hewittsche Ergebnis jedenfalls dann richtig ist,

wenn man $\int f d\gamma^*$ entweder durch $\int f d\mu^{(u)}$ oder durch $\int f' d\varrho'$ ersetzt. (Für die zweite Ersetzung müssen allerdings an $\mathfrak{K}$ die in 4.2 formulierten drei Zusatzforderungen gestellt werden, die aber letzten Endes keine Beschränkung der Allgemeinheit bedeuten.) Herr Hewitt hat übrigens selbst angeregt, eine Richtigstellung seines Satzes entweder durch Verwendung eines anderen Integralbegriffes oder durch geeignete Einführung idealer Punkte zu versuchen.

4.6. Abschließend wenden wir uns der Frage zu, in welcher Weise sich der stetige Teil I_c des Funktional I durch das auf $E'_{\mathfrak{K}}$ definierte Radonsche Maß ϱ' ausdrückt.

Satz 17. *Es sei f eine nicht negative Funktion aus $\mathfrak{K}$ und $\tilde{f}$ diejenige Fortsetzung von f auf $E'_{\mathfrak{K}}$, welche in allen Punkten von $E'_{\mathfrak{K}} - E$ gleich Null ist. Dann gilt für den stetigen Teil I_c von I*

$$(36) \quad I_c(f) = \tilde{f} \tilde{f} d\varrho'^{29)}.$$

Beweis. Zunächst sei an die Definition von $\tilde{f} \tilde{f} d\varrho' = N(\tilde{f})$ erinnert. Es ist

$$\tilde{f} \tilde{f} d\varrho' = \inf \left(\sup \int k'_n d\varrho'; \{k'_n\} \in \mathfrak{F}(\tilde{f}) \right),$$

wenn $\mathfrak{F}(\tilde{f})$ die Menge aller nicht fallenden Folgen $\{k'_n\}$ nicht negativer Funktionen $k'_n \in \mathfrak{K}(E_{\mathfrak{K}})$ mit $\tilde{f} \geq \sup k'_n$ bezeichnet. Ist andererseits $r(f)$ bzw. $r'(\tilde{f})$

²⁹⁾ Bezüglich $\tilde{f} \tilde{f} d\varrho'$ vgl. Fußnote 17).

die Menge aller nicht fallenden Folgen $\{f_n\}$ bzw. $\{f'_n\}$ nicht negativer Funktionen $f_n \in \mathfrak{N}$ bzw. $f'_n \in \mathfrak{N}'$ mit $f \leq \sup f_n$ bzw. $\tilde{f} \leq \sup f'_n$, so kann (nach einer einfachen Überlegung) die in Lemma 3 gewonnene Formel für $I_c(f)$ auch so geschrieben werden

$$I_c(f) = \inf(\sup I(f_n); \{f_n\} \in \mathfrak{r}(f)).$$

Nun ist offenbar für eine Folge $\{f_n\} \in \mathfrak{r}(f)$ die Folge $\{f'_n\}$ der stetigen Fortsetzungen f'_n der Funktionen f_n auf $E'_{\mathfrak{N}}$ ein Element von $\mathfrak{r}'(\tilde{f})$ und umgekehrt für eine Folge $\{f'_n\} \in \mathfrak{r}'(\tilde{f})$ die Folge $\{f_n\}$ der Verengerungen f_n von f'_n auf E ein Element von $\mathfrak{r}(f)$. Wegen (32) kann daher die letzte Formel zu

$$I_c(f) = \inf(\sup I'(f'_n); \{f'_n\} \in \mathfrak{r}'(\tilde{f}))$$

umgeschrieben werden. Wir beweisen die Gleichheit der rechten Seite dieser Gleichung mit $\int \tilde{f} d\varrho'$. Für jede Folge $\{f'_n\} \in \mathfrak{r}'(\tilde{f})$ gilt nach bekannten Eigenschaften des Oberintegrals $\int \tilde{f} d\varrho' \leq \sup \int f'_n d\varrho'$; da nach (25) $\int f'_n d\varrho' = \int f'_n d\varrho' \leq I'(f'_n)$ ist und $\{f'_n\}$ in $\mathfrak{r}'(\tilde{f})$ beliebig gewählt war, folgt $\int \tilde{f} d\varrho' \leq I_c(f)$. Ist umgekehrt $\{k'_n\}$ eine beliebige Folge aus $\mathfrak{r}'(\tilde{f})$, so ist die Verengung k_n einer jeden Funktion k'_n auf E nach Satz 15 ein Element von $\mathfrak{Z}$ und $\int k_n d\mu = \int k'_n d\varrho'$. Aus $0 \leq k_1 \leq \dots \leq k_n \leq k_{n+1} \leq \dots$ und $f \leq \sup k_n$ folgt $I_c(f) \leq \sup I_c(k_n) \leq \sup I(k_n)$ nach Satz 4, Beh. I; wegen $I(k_n) = \int k_n d\mu = \int k'_n d\varrho'$ ist also $I_c(f) \leq \sup \int k'_n d\varrho'$ und somit $I_c(f) \leq \int \tilde{f} d\varrho'$. Damit ist (36) bewiesen.

Nach 3.4 ist der sich aus $I' \cdot \mathfrak{N}'$ ableitende, an $E'_{\mathfrak{N}}$ adaptierte Inhalt $\mu' \cdot \mathfrak{Q}'$ σ -additiv. Aus μ' leitet sich daher das äußere Maß $\bar{\mu}'$ und das innere Maß $\underline{\mu}'$ ab; $\bar{\mu}'$ und $\underline{\mu}'$ sind definiert auf dem System aller Teilmengen von $E'_{\mathfrak{N}}$, welche durch eine Folge von Mengen aus $\mathfrak{Q}'$ überdeckt werden können³⁰⁾. Mit Hilfe von $\bar{\mu}'$ und $\underline{\mu}'$ errechnet sich der σ -additive Teil μ_c und der rein endlich-additive Teil μ_p von $\mu|_{\mathfrak{Q}}$ wie folgt.

Satz 18. Für jede Menge $Q \in \mathfrak{Q}$ ist

$$(37) \quad \mu_c(Q) = \bar{\mu}'(Q) \quad \text{und} \quad \mu_p(Q) = \underline{\mu}'(\bar{Q} - Q),$$

wenn $\bar{Q}$ die abgeschlossene Hülle von Q in $E'_{\mathfrak{N}}$ bezeichnet.

Beweis. Zu $Q \in \mathfrak{Q}$ und $\varepsilon > 0$ existieren nach (15) Funktionen $g, h \in \mathfrak{N}$ mit $0 \leq g \leq \chi_Q \leq h$, $I_c(g) \leq \mu_c(Q) \leq I_c(h)$ und $I_c(h - g) \leq \varepsilon$. Bezeichnen $\tilde{g}$ und $\tilde{h}$ die in allen Punkten von $E'_{\mathfrak{N}} - E$ verschwindenden Fortsetzungen von g und h auf $E'_{\mathfrak{N}}$, so gilt $\tilde{g} \leq \chi'_Q \leq \tilde{h}$ und $\int \tilde{g} d\varrho' \leq \int \chi'_Q d\varrho' \leq \int \tilde{h} d\varrho'$. Nach Satz 17 ist $\int \tilde{g} d\varrho' = I_c(g)$ und $\int \tilde{h} d\varrho' = I_c(h)$; hieraus folgt $|\int \chi'_Q d\varrho' - \mu_c(Q)| \leq \varepsilon$. Da $\varepsilon > 0$ beliebig gewählt war, ist also $\mu_c(Q) = \int \chi'_Q d\varrho'$. Der erste Teil der Behauptung folgt daher aus der Gleichung $\bar{\mu}'(Q) = \int \chi'_Q d\varrho'$, deren Richtigkeit aus der Stoneschen Integrationstheorie entnommen werden kann. Der Vollständigkeit halber geben wir hierfür jedoch einen Beweis an. Es bezeichne $\mathfrak{m}'(Q)$ das System aller nicht fallenden Folgen $\{Q'_n\}$ von Mengen aus $\mathfrak{Q}'$ mit

³⁰⁾ Vgl. etwa HAUPT-AUMANN-PAUC [12b], S. 55.

$Q \subseteq \bigcup_n Q'_n$; nach Satz 15 ist $m'(Q)$ nicht leer. Nach Definition des äußeren Maßes ist

$$\bar{\mu}'(Q) = \inf(\sup \mu'(Q'_n); \{Q'_n\} \in m'(Q)).$$

Für jede Folge $\{Q'_n\} \in m'(Q)$ gilt daher $\int \bar{\chi}'_Q d\varrho' \leq \sup \int \bar{\chi}'_{Q'_n} d\varrho' = \sup \int \chi'_{Q'_n} d\varrho' = \sup \mu'(Q'_n)$; also ist $\int \bar{\chi}'_Q d\varrho' \leq \bar{\mu}'(Q)$. Weiter existiert zu jeder reellen Zahl ε mit $0 < \varepsilon < 1$ eine nicht fallende Folge $\{f'_n\}$ nicht negativer Funktionen $f'_n \in \mathfrak{R}(E_{\mathfrak{R}})$ mit $\chi'_Q \leq \sup f'_n$ und $\sup \int f'_n d\varrho' \leq \int \bar{\chi}'_Q d\varrho' + \varepsilon$. Nach Satz 8 ist jedes f'_n Riemann-integrierbar bezüglich I' , also insbesondere I' -meßbar; folglich existiert eine Folge $\{\alpha_n\}$ reeller Zahlen mit $\alpha_1 > \alpha_2 > \dots > \alpha_n > \dots > 1 - \varepsilon = \eta^{-1}$ derart, daß $Q'_n = [f'_n > \alpha_n]$ ein Element von $\mathfrak{Q}'$ ist. Nach Konstruktion gilt $\{Q'_n\} \in m'(Q)$ und $\mu'(Q'_n) \leq \alpha_n^{-1} \int f'_n d\varrho' \leq \eta \int f'_n d\varrho'$; also ist $\bar{\mu}'(Q) \leq \sup \mu'(Q'_n) \leq \eta \sup \int f'_n d\varrho' \leq \frac{1}{1-\varepsilon} (\int \bar{\chi}'_Q d\varrho' + \varepsilon)$. Hieraus folgt die noch fehlende Ungleichung $\bar{\mu}'(Q) \leq \int \bar{\chi}'_Q d\varrho'$ und somit die Gleichung $\bar{\mu}'(Q) = \int \bar{\chi}'_Q d\varrho'$. — Nach dem Beweis des Satzes 15 ist die Menge $Q' = Q \cup (\bar{Q} - E)$ für jedes $Q \in \mathfrak{Q}$ ein Element von $\mathfrak{Q}'$; also ist auch $\bar{Q} = \bar{Q}' \in \mathfrak{Q}'$ und $\mu(Q) = \mu'(Q') = \mu'(\bar{Q})$ nach Satz 15 und der Adaption von μ' an $E_{\mathfrak{R}}$. Wegen $\bar{Q} \in \mathfrak{Q}'$ gilt $\mu'(\bar{Q}) = \bar{\mu}'(Q) + \mu'(\bar{Q} - Q)$. Hieraus und aus $\mu(Q) = \mu_c(Q) + \mu_p(Q) = \bar{\mu}'(Q) + \mu_p(Q)$ folgt schließlich $\mu_p(Q) = \mu'(\bar{Q} - Q)$.

Die Formel (37) verallgemeinert die erste Hälfte von (25). Genügen nämlich E und $\mathfrak{R}$ den in 3.1 formulierten Bedingungen, so ist $E'_{\mathfrak{R}} = E$, $\tilde{f} = f$ und $\mu' = \mu$, ferner ist dann f Q -integrierbar.

Korollar. Die auf E konstanten Funktionen seien Elemente von $\mathfrak{R}$. Dann sind folgende Aussagen gleichwertig: (1a) $\mu|_{\mathfrak{Q}}$ ist σ -additiv; (2a) es ist $\mu'(E'_{\mathfrak{R}} - E) = 0$; (3a) es ist $\mu(E) = \bar{\mu}'(E)$. Ferner sind gleichwertig die Aussagen: (1b) $\mu|_{\mathfrak{Q}}$ ist rein-endlich-additiv; (2b) es ist $\bar{\mu}'(E) = 0$; (3b) es ist $\mu(E) = \mu'(E'_{\mathfrak{R}} - E)$.

Beweis. Die Behauptung folgt unmittelbar aus Satz 18. Man hat nur zu beachten, daß $E \in \mathfrak{Q}$ und $\bar{E} = E'_{\mathfrak{R}}$ ist.

Bemerkung. Überträgt man von $\mathfrak{R}$ auf $\mathfrak{R}'$ auch die Zerlegungsteile I_c und I_p von I durch die zu (32) analogen Festsetzungen $(I_c)'(g') = I_c(g)$ und $(I_p)'(g') = I_p(g)$ ($g \in \mathfrak{R}$), so spiegelt sich die Zerlegung $I = I_c + I_p$ in der Zerlegung $I' = (I_c)' + (I_p)'$ wider. Im allgemeinen gilt nicht $(I_c)' = (I')_c$ und $(I_p)' = (I')_p$, sondern nur $(I_c)'(g') \leq (I')_c(g')$ und $(I_p)'(g') \geq (I')_p(g')$ für alle $g' \geq 0$ aus $\mathfrak{R}'$. Hierzu genügt es zu bemerken, daß mit $I_c|_{\mathfrak{R}}$ auch $(I_c)'|_{\mathfrak{R}'}$ stetig ist. Notwendig und hinreichend für das Bestehen der Gleichungen $(I_c)' = (I')_c$ und $(I_p)' = (I')_p$ ist vielmehr die σ -Additivität des Inhalts $\mu|_{\mathfrak{Q}}$.

Beweis. Für alle $f \in \mathfrak{R}$ ist $(I_c)'(f') = I_c(f) = \int f d\mu_c$ nach Satz 5 sowie $(I')_c(f') = \int f' d\mu' = \int f d\mu$ nach Satz 10 und dem Korollar zu Satz 15. Folglich gilt $(I_c)' = (I')_c$ und damit auch $(I_p)' = (I')_p$ dann und nur dann, wenn $\int f d\mu_c = \int f d\mu$ ist für alle $f \in \mathfrak{R}$. Nach Satz 6 ist hiermit $\mu_c = \mu$

gleichwertig. — Falls μ σ -additiv ist, ergibt sich aus Satz 10 als Darstellung für den stetigen Teil von I die für alle $f \in \mathfrak{R}$ gültige Gleichung $I_c(f) = \int f' d\varrho'$.

4.7. Beispiel. Die Stonesche Kompaktifizierung einer Booleschen Mengenalgebra als Beispiel für einen Raum $E'_{\mathfrak{R}}$. Es sei $\mathfrak{B}$ eine Boolesche Algebra von Teilmengen einer Grundmenge E , die in $\mathfrak{B}$ als Element enthalten ist; die Menge E sei durch $\mathfrak{B}$ separiert, d. h. zu je zwei verschiedenen Elementen $x, y \in E$ existiert ein $A \in \mathfrak{B}$ mit $x \in A$ und $y \in E - A$. Mit $\mathfrak{R}$ werde bezeichnet die Menge aller $\mathfrak{B}$ -Treppenfunktionen, also aller Funktionen $g = \sum_{v=1}^n \lambda_v \chi_{A_v}$, wobei $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ reelle Zahlen und $A_1, \dots, A_n$ Mengen aus $\mathfrak{B}$ sind. Dann besitzt $\mathfrak{R}$ die Eigenschaften (1) bis (3) sowie (21) und (22), ferner ist jede Funktion $g \in \mathfrak{R}$ beschränkt. Also sind die in 4.2 gemachten Voraussetzungen über $\mathfrak{R}$ erfüllt und es existiert der Raum $E'_{\mathfrak{R}}$. Dieser ist kompakt, da die konstante Funktion $g=1$ in $\mathfrak{R}$ liegt.

Nach STONE [20] existiert zu jeder Booleschen Algebra $\mathfrak{B}$ ein kompakter, total unzusammenhängender Raum $U_{\mathfrak{B}}$ und ein Isomorphismus Φ von $\mathfrak{B}$ auf die Boolesche Mengenalgebra aller zugleich offenen und abgeschlossenen Teilmengen von $U_{\mathfrak{B}}$. Die Punkte von $U_{\mathfrak{B}}$ sind die Ultrafilter in $\mathfrak{B}$; für ein beliebiges Element $A \in \mathfrak{B}$ besteht ΦA aus allen Ultrafiltern in $\mathfrak{B}$, die A als Element enthalten. Die Mengen ΦA mit $A \in \mathfrak{B}$ bilden eine offene (und abgeschlossene) Basis von $U_{\mathfrak{B}}$. Wendet man das Stonesche Verfahren auf die Boolesche Mengenalgebra $\mathfrak{B}$ an, so kann E als dichte Teilmenge von $U_{\mathfrak{B}}$ aufgefaßt werden, indem man jeden Punkt $x \in E$ mit dem durch x in $\mathfrak{B}$ bestimmten Haupt(ultra)filter identifiziert. Für jedes $A \in \mathfrak{B}$ ist dann ΦA die abgeschlossene Hülle von A in $U_{\mathfrak{B}}$ und $A = E \cap \Phi A$ ³¹⁾. Wir behaupten:

Es existiert eine die Punkte von E festlassende Homöomorphie von $E'_{\mathfrak{R}}$ auf $U_{\mathfrak{B}}$.

Beweis. Für jede Menge $A \in \mathfrak{B}$ ist $g = \chi_A$ als Element von $\mathfrak{R}$ zu einer auf $E'_{\mathfrak{R}}$ stetigen Funktion g' fortsetzbar. Aus der Stetigkeit von g' folgt $g'(x') = 1$ für alle $x' \in \bar{A}$ und $g'(y') = 0$ für alle $y' \in \overline{E - A}$; wegen $E'_{\mathfrak{R}} = \bar{E} = \bar{A} \cup \overline{E - A}$ ist daher $g' = \chi'_{\bar{A}}$. Hieraus folgt weiter, daß die Zuordnung $A \rightarrow \bar{A}$ ein Isomorphismus von $\mathfrak{B}$ auf die Boolesche Algebra $\bar{\mathfrak{B}}$ der abgeschlossenen Hüllen $\bar{A}$ von Mengen $A \in \mathfrak{B}$ ist und $A = E \cap \bar{A}$ für jede Menge $A \in \mathfrak{B}$ gilt. Die zugleich offenen und abgeschlossenen Mengen $\bar{A} \in \bar{\mathfrak{B}}$ bilden eine offene (und abgeschlossene) Basis von $E'_{\mathfrak{R}}$. Zu einem beliebigen Punkt $x' \in E'_{\mathfrak{R}}$ und einer beliebigen Umgebung U' von x' in E' existiert nämlich eine stetige Funktion $f' | E'_{\mathfrak{R}}$ mit $f'(x') = 1$ und $f'(y') = 0$ für alle $y' \notin U'$. Nach Lemma 4 und (31) existiert zu f' eine Funktion $g' \in \mathfrak{R}$ mit $|f'(z') - g'(z')| \leq 1/3$ für alle $z' \in E'_{\mathfrak{R}}$. g' hat die Gestalt $g' = \sum \alpha_v \chi'_{\bar{A}_v}$ ($\alpha_v \in \mathbb{P}$, $\bar{A}_v \in \bar{\mathfrak{B}}$). Wegen $f'(x') = 1$ ist $g'(x') \neq 0$; folglich liegt x' in einer Menge $\bar{A}_{v_0}$ und es ist $|1 - \alpha_{v_0}| \leq 1/3$. Da dann nicht $|\alpha_{v_0}| \leq 1/3$ sein kann, gilt $\bar{A}_{v_0} \subseteq U'$. Also ist $\bar{\mathfrak{B}}$ eine offene Basis von $E'_{\mathfrak{R}}$. Ordnet man jedem Punkt $x' \in E'_{\mathfrak{R}}$ als Bild $\psi(x')$ in $U_{\mathfrak{B}}$ den aus allen Mengen $A \in \mathfrak{B}$ mit $x' \in \bar{A}$ bestehenden Ultrafilter in $\mathfrak{B}$ zu, so ist

³¹⁾ Vgl. PAUC [18], S. 33.

$\varphi(\bar{A}) = \Phi A$ für jede Menge $A \in \mathfrak{B}$. Hieraus und den bewiesenen Eigenschaften von $E'_{\mathfrak{R}}$ folgt, daß φ die behauptete Homöomorphie von $E'_{\mathfrak{R}}$ auf $U_{\mathfrak{B}}$ ist, welche E punktweise festläßt.

Wir führen dieses Beispiel weiter und geben eine *Kennzeichnung des σ -additiven und rein-endlich-additiven Teils einer additiven Mengenfunktion* an. Auf der Booleschen Mengenalgebra $\mathfrak{B}$ sei nämlich eine nicht negative, (endlich-)additive Funktion φ definiert. Wir übertragen sie von $\mathfrak{B}$ auf die zu $\mathfrak{B}$ isomorphe Boolesche Algebra $\bar{\mathfrak{B}}$ der abgeschlossenen Hüllen $\bar{A}$ von Mengen $A \in \mathfrak{B}$ in $E'_{\mathfrak{R}}$, indem wir $\varphi'(\bar{A}) = \varphi(A)$ für jedes $A \in \mathfrak{B}$ bzw. $\bar{A} \in \bar{\mathfrak{B}}$ setzen. Dann ist $\varphi'|\bar{\mathfrak{B}}$ trivialerweise σ -additiv; aus φ' leitet sich daher das auf dem System aller Teilmengen von $E'_{\mathfrak{R}}$ definierte äußere Maß $\bar{\varphi}'$ und innere Maß $\underline{\varphi}'$ ab. Wir behaupten:

Bezeichnet φ_c den σ -additiven und φ_p den rein-endlich-additiven Teil von $\varphi|\mathfrak{B}$, so gilt

$$\varphi_c(A) = \bar{\varphi}'(A) \quad \text{und} \quad \varphi_p(A) = \underline{\varphi}'(\bar{A} - A)$$

für jede Menge $A \in \mathfrak{B}$ ³²⁾.

Beweis. Der additiven Funktion $\varphi|\mathfrak{B}$ entspricht in umkehrbar eindeutiger Weise ein positives, lineares Funktional $I|\mathfrak{R}$: Für eine Funktion $g = \sum \alpha_v \chi_{A_v}$ aus $\mathfrak{R}$ ist $I(g) = \sum \alpha_v \varphi(A_v)$. Aus $I|\mathfrak{R}$ leitet sich das Funktional $I'|\mathfrak{R}'$ und aus diesem der an $E'_{\mathfrak{R}}$ adaptierte Inhalt $\mu'|\Omega'$ ab. Aus der Definition von $\mu'|\Omega'$ folgt, da jede Funktion $g' \in \mathfrak{R}'$ Linearkombination von charakteristischen Funktionen $\chi'_{\bar{A}}$ ($\bar{A} \in \bar{\mathfrak{B}}$) ist, daß $\mu'|\Omega'$ die kleinste Erweiterung von $\varphi'|\bar{\mathfrak{B}}$ zu einem vollständigen Inhalt ist. Dann ist aber $\bar{\varphi}' = \bar{\mu}'$ sowie $\underline{\varphi}' = \underline{\mu}'$. Die Behauptung folgt daher aus Satz 18.

Aus den bewiesenen Formeln für φ_c und φ_p folgen nun notwendige und hinreichende Bedingungen dafür, daß φ σ -additiv bzw. rein-endlich-additiv ist; diese Bedingungen sind zu denen im Korollar zu Satz 18 formulierten analog. Insbesondere erweist sich φ dann und nur dann als σ -additiv, wenn $\underline{\varphi}'(\bar{E} - E) = 0$ ist. Dieses Kriterium findet sich bereits bei PAUC [18], S. 35.

Literatur

- [1] ARENS, R.: Representation of functionals by integrals. Duke math. J. **17**, 499—506 (1950). — [2] AUMANN, G.: Reelle Funktionen. Berlin-Göttingen-Heidelberg: Springer 1954. — [3] BAUER, H.: Eine Rieszsche Bandzerlegung im Raum der Bewertungen eines Verbandes. Sitzgsber. math.-nat. Kl. Bayer. Akad. Wiss. München **1953**, 89—117 (1954). — [4] BAUER, H.: Caractérisation topologique de la partie complètement additive et de la partie purement additive d'une fonction additive d'ensemble. C. r. Acad. Sci. Paris **238**, 1771—1773 (1954). — [5] BAUER, H.: Reguläre und singuläre Abbildungen eines distributiven Verbandes in einen vollständigen Vektorverband, welche der Funktionalgleichung $f(x \vee y) + f(x \wedge y) = f(x) + f(y)$ genügen. J. reine angew. Math. **194**, 141—179 (1955). — [6] BAUER, H.: Darstellung additiver Funktionen auf Booleschen Algebren als Mengenfunktionen. Arch. der Math. **6**, 215—222 (1955). — [7] BAUER, H.: Zur Theorie des Riemann-Integrals in lokal kompakten Räumen. Sitzgsber. math.-nat. Kl. Bayer. Akad. Wiss. München **1955**, 187—208 (1956). — [8] BOURBAKI, N.:

³²⁾ Da $E'_{\mathfrak{R}} = U_{\mathfrak{B}}$ ist, erweist sich jetzt dieses in [4] unter anderem von uns angekündigte Resultat als Spezialfall von Satz 18.

Intégration, Chap. I—IV. Actual. Scient. et Ind. **1175**, Paris 1952. — [9] GELFAND, I., u. G. ŠILOV: Über verschiedene Methoden der Einführung der Topologie in die Menge der maximalen Ideale eines normierten Ringes. Rec. math. Moscou, n. ser. **9**, 25—38 (1941). — [10] HAUPT, O., et CHR. PAUC: Mesure et topologie adaptées. Espaces mesurés topologiques. C. r. Acad. Sci. Paris **230**, 711—712 (1950). — [11] HAUPT, O., u. CHR. PAUC: Bemerkungen über Inhalte und Maße in lokal bikompakten Räumen. Akad. Wiss. Lit. Mainz, Abh. math.-nat. Kl. **1955**, 189—218 (1956). — [12a] HAUPT-AUMANN-PAUC: Differential- und Integralrechnung, Bd. I, 2. Aufl. Göschens Lehrbücherei **24**, Berlin 1948. — [12b] HAUPT-AUMANN-PAUC: Differential- und Integralrechnung, Bd. III, 2. Aufl. Göschens Lehrbücherei **26**, Berlin 1955. — [13] HEWITT, E.: Integral representation of certain linear functionals. Arkiv för Matematik **2**, 269—282 (1951). — [14] LOOMIS, L. H.: Linear functionals and content. Amer. J. Math. **76**, 168—182 (1954). — [15] NAKANO, H.: On the product of relative spectra. Ann. of Math., II. s. **49**, 281—315 (1948). — [16] NÖBELING, G., u. H. BAUER: Über die Erweiterungen topologischer Räume. Math. Ann. **130**, 20—45 (1955). — [17] NÖBELING, G., u. H. BAUER: Allgemeine Approximationskriterien mit Anwendungen. J.-Ber. Deutsch. Math.-Verein. **58**, 54—72 (1955). — [18] PAUC, CHR.: Darstellungs- und Struktursätze für Boolesche Verbände und σ -Verbände. Arch. der Math. **1**, 29—41 (1948). — [19] PAUC, CHR.: Intégrale de partition et intégrale topologique. Familles dérivantes topologiques. C. r. Acad. Sci. Paris **230**, 810—811 (1950). — [20] STONE, M. H.: Applications of the theory of Boolean rings to general topology. Trans. Amer. math. Soc. **41**, 375—481 (1937). — [21] STONE, M. H.: Notes on integration, I—IV. Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A. **34**, 336—342, 447—455, 483—490 (1948); **35**, 50—58 (1949). — [22] WOODBURY, M. A.: A decomposition theorem for finitely additive set functions (Preliminary report). Bull. Amer. math. Soc. **56**, 171 (1950). — [23] YOSIDA, K., and E. HEWITT: Finitely additive measures. Trans. Amer. math. Soc. **72**, 46—66 (1952).

Erlangen, Mathematisches Institut der Universität

(Eingegangen am 2. März 1956)